59. *Sur le principe de Duhamel*

Par Keiichiro KITAGAWA
Département de Mathématiques, à la Faculté des Sciences,
de l'Université d'Ehimé

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1990)

§1. Nous considérons le problème de Cauchy *non homogène* $(PC)_s$ et le problème de Cauchy *homogène* $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$:

$$(PC)_s \quad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)U(t, x; s)=F(t, x) & t\in[s, T],\ x\in \boldsymbol{R}^d \\ U(s, x; s)=\Phi(x) \end{cases}$$

$$(PCH)_s \quad \begin{cases} L(t, x; \partial_t, \partial_x)U(t, x; s)=0 & t\in[s, T],\ x\in \boldsymbol{R}^d \\ U(s, x; s)=\Phi(x) \end{cases}$$

pour un opérateur différentiel linéaire aux dérivées partielles

$$L(t, x; \partial_t, \partial_x)\equiv\partial_t I-A(t, x; \partial_x)$$

où $A(t, x; \partial_x)$ est une $N\times N$-matrice carrée.

Le fait suivant qu'on appelle le principe de Duhamel [1], [2], [6] est bien connu et souvent utilisé.

La solution $U(t, x; s)$ du $(PC)_s$ à données $(F(t, x), \Phi(x))$ est donnée par la formule

$$(D) \qquad U(t, x; s)=U(t, x; s, \Phi)+\int_s^t U(t, x; \tau, F(\tau, \circ))d\tau$$

où $U(t, x; s, \Phi)$ est la solution du $(PCH)_s$ à donnée $\Phi(x)$.

Au cas où l'opérateur L est l'opérateur différentiel ordinaire, la formule de Duhamel (D) est toujours valable. Mais il n'est pas toujours ainsi au cas où L est l'opérateur différentiel aux dérivées partielles.

Au cas où les coefficients de L ne dépendent que de t, I. G. Petrowsky [4] et L. Schwartz [5] ont montré, par la transformation de Fourier, que, si les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont uniformément bien posés, alors (D) donne la solution du $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$, et par conséquent, les $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés. L. Schwartz *y* a simplement remarqué que, si les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés, mais non uniformément, alors on ne peut rien conclure sur les $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$.

Pour la simplicité, nous traitons les problèmes dans le cadre de l'espace de Sobolev H^∞. Nous démontrons que, pour que les $(PC)_s$ $(0\leq s<T)$ soient bien posés, il faut et il suffit que les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ soient uniformément bien posés. La suffisance est grâce au principe de Duhamel. A propos de cette remarque de L. Schwartz, nous donnons un exemple de l'opérateur simple pour lequel les $(PCH)_s$ $(0\leq s<T)$ sont bien posés, mais non uniformément.

Nous témoignons ici notre gratitude à Prof. S. Mizohata de ses précieux conseils.