87. *Existence de bases opérateurs pour l'espace des solutions des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.* I

Par H. CHARRIÈRE

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Oct. 12, 1987)

On définit d'abord, pour des bons opérateurs à n variables, un transformé de Fourier et un produit de convolution dits "partiels". Pour simplifier les notations on prendra, dans les paragraphes 1, 2, 3, deux variables x_1 et x_2, mais x_1 peut être remplacé par un n_1-uple $(y_1, \cdots, y_{n_1})$ et x_2 par un $(n-n_1)$-uple $(y_{n_1+1}, \cdots, y_n)$ de variables.

1) **Transformé de Fourier partiel d'un opérateur.** Soit

$$Q=(Q_{k,j})_{(k,j)\in N^2\times N^2}$$

un bon opérateur analytique à deux variables ([1]).

Définition. On appelle *transformé de Fourier partiel* par rapport à x_1, de Q, le bon opérateur analytique, noté $\mathcal{F}_{x_1}(Q)$, associé à la matrice infinie dont le terme général $(\mathcal{F}_{x_1}(Q))_{k,j}$ est donné par:

$$(\mathcal{F}_{x_1}(Q))_{(k_1,k_2),(j_1,j_2)}=\sum_{-k_1\le l\le 0} i^{j_1-k_1}(-1)^{l+j_1}(j_1!/(-l)!(k_1+l)!)Q_{(j_1+l,k_2),(k_1+l,j_2)}.$$

On définit de même $\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(Q)$ en remplaçant i par $(-i)$ dans la définition de $(\mathcal{F}_{x_1}(Q))_{k,j}$. Tout bon opérateur à deux variables est entièrement déterminé par ses valeurs sur les fonctions $(x_1, x_2)\to f(x_1)g(x_2)$ et on a la formule suivante, qui sert de définition au transformé de Fourier partiel d'un opérateur Q qui ne serait plus analytique mais C^∞ par exemple:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{x_1}(Q)((y_1, y_2)\to f(y_1)g(y_2))(x_1, x_2)\\&\quad=\mathcal{F}(y_1\mapsto Q((z_1, z_2)\mapsto e^{-ix_1z_1}g(z_2))(y_1, x_2))(y_1\mapsto f(x_1+y_1)).\end{aligned}$$

Cette formule ramène en effet la connaisance des transformés de Fourier d'opérateurs à celle des transformés de Fourier des opérateurs particuliers que sont les fonctions.

Quelques propriétés: $\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(\mathcal{F}_{x_1}(Q))=\mathcal{F}_{x_1}(\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(Q))=Q$, $\mathcal{F}_{x_1}(\partial Q/\partial x_1)=\mathcal{F}_{x_1}(Q)\circ ix_1\partial(\mathcal{F}_{x_1}(Q))/\partial x_1=\mathcal{F}_{x_1}(Q\circ ix_1)$, $\mathcal{F}_{x_1}(\partial Q/\partial x_2)=\partial(\mathcal{F}_{x_1}(Q))/\partial x_2$, $\mathcal{F}(Q)=\mathcal{F}_{x_1}(\mathcal{F}_{x_2}(Q))=\mathcal{F}_{x_2}(\mathcal{F}_{x_1}(Q))$.

Exemples. 1) Soit $\delta_{(ax_1+bx_2,cx_1+dx_2)}$ l'opérateur $f(x_1, x_2)\to f(ax_1+bx_2, cx_1+dx_2)$, que l'on notera aussi $\delta_{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)}$

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{x_1}(\delta_{\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)})((y_1, y_2)\to f(y_1)g(y_2))(x_1, x_2)\\&\quad=e^{-ibx_1x_2}\sum_{l\in N}(-i)^l(c^l/l!)f^{(l)}((1-a)x_1)g^{(l)}(dx_2)\end{aligned}$$

en particulier $\mathcal{F}_{x_1}(\delta_{(0,0)})=\delta_{(x_1,0)}=\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(\delta_{(0,0)})$

$$\mathcal{F}_{x_1}(\delta_{(0,x_2)})=1=\overline{\mathcal{F}}_{x_1}(\delta_{(0,x_2)})$$

2) $\mathcal{F}_{x_1}(\partial^n/\partial x_1^n)=(-ix_1)^n\delta_{(0,x_2)}$