55. *Sur certaines fonctions définies par les chiffres des entiers*

Par Jean-Loup MAUCLAIRE
The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., June 9, 1987)

1. Introduction. q étant un entier >1, une application $f: N^* \to C$ est dite *q-multiplicative* si quelque soit $r \geq 1$, on a ;

$f(aq^r+b)=f(aq^r)\cdot f(b)$ pour $1 \leq a \leq q-1$ et $0 \leq b < q^r$, et $f(0q^r)=1$.

Cette espèce de fonction a été considérée par A. O. Gelfond ([1]), et dans le cas $|f| \leq 1$, etudiée par H. Delange ([2]). Par la suite, la notion de q-multiplicativité a été étendue (voir, à ce sujet, [3]). Toutes ces études cependant portent essentiellement sur le cas où f est de module au plus égal à 1. En examinant avec attention les problèmes standard qui se posent dans le cas général, on se rend compte très vite qu'il suffit d'avoir un résultat relatif aux fonctions q-multiplicatives positives pour pouvoir en résoudre un certain nombre, par exemple, étudier la presque-périodicité, l'existence d'une moyenne non-nulle sous certaines conditions, etc.

L'objet de cette note est de fournir un tel résultat.

2. Enoncé du résultat. Etant donné un couple (a, q^k) où $0 \leq a < q^k$, $k \geq 1$, on définit I_{a,q^k}: $N \to \{0, 1\}$ par

$$I_{a,q^k}(n)=1 \quad \text{si} \quad n \equiv a \bmod q^k,$$
$$=0 \quad \text{sinon.}$$

On note Γ l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) à coefficients réels d'éléments I_{a,q^k}. Si tous les coefficients peuvent être choisis ≥ 0, on notera Γ^+ l'ensemble ainsi défini.

On remarquera que:

$$\text{Si} \quad \gamma \in \Gamma, \quad \gamma \geq 0 \quad \text{alors}, \quad \gamma \in \Gamma^+.$$

En effet: Si $\gamma \in \Gamma$, γ est défini sur une réunion finie de progressions arithmétiques (a, q^k), et une telle réunion s'écrit de façon unique comme réunion finie disjointe de progressions arithmétique; comme $\gamma \geq 0$, γ est ≥ 0 sur chacune de ces progressions; donc, γ est dans Γ^+.

De ceci, on peut tirer la conclusion que tout γ de Γ s'écrit de façon unique:

$$\gamma=\gamma^+-\gamma^-, \quad \gamma^+ \in \Gamma^+, \quad \gamma^- \in \Gamma^+,$$

tels que: $|\gamma|=\gamma^++\gamma^-$.

Par conséquent, pour définir une forme linéaire positive sur Γ vérifiant une condition de continuité, il suffira de la définir sur Γ^+. Nous pouvons énoncer le résultat:

Théorème 1. *Soit f une fonction q-multiplicative positive. On définit sur Γ^+ une forme linéaire par*