37. *Sur une inégalité de la théorie probabiliste des nombres*

Par Jean Loup MAUCLAIRE
The Institute for Statistical Mathematics, Tokyo

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 13, 1987)

1. Introduction. L'une des inégalités les plus utilisées en théorie probabiliste des nombres est l'inégalité dite de "Turan-Kubilius" ([2]). Sous sa forme originale aussi bien que sous sa forme duale, elle a joué un rôle important et continue à être utilisée avec succès. On se propose ici d'en fournir une extension à des semi-groupes plus généraux que ceux habituellement considérés.

2. Position du problème et résultats.

i) Soit Λ un semi-groupe normé par $N(\cdot)$, engendré par un ensemble P de "nombres premiers" p, sur lequel on fait les hypothèses suivantes:

H_1: $\sum_{\substack{N(a)\le x\\ a\in\Lambda}} 1\le Ax$, $\quad A$ absolue.

H_2: $\prod_{\substack{N(p^\nu)\le x\\ p\in P}} (1+1/N(p))\le B\log x$, $\quad x\ge 2$, B étant une constante absolue.

H_3: $\sum_{\substack{N(p^\nu)\le x\\ p\in P}} \log N(p^\nu)\le Cx$, $\quad C$ absolue.

Remarque 1. H_2 a pour conséquence que

$$\textstyle\sum_{N(p)\le x} 1/(N(p))\le \log\log x+\log B+O(1).$$

Pour tout $p\in P$, on définit une fonction $\varepsilon_{p^\nu}:\Lambda\to\{0, 1\}$ par:

$$\varepsilon_{p^\nu}(a)=1 \quad \text{si } p^\nu \text{ divise } a \text{ exactement}, \qquad 0 \quad \text{sinon},$$

et on dit qu'une application $f:\Lambda\to\boldsymbol{C}$ est une fonction additive si pour tout a s'écrivant $a=\prod_{\varepsilon_{p^\nu}(a)=1} p^\nu$, on a:

$$f(a)=\sum_{\varepsilon_{p^\nu}(a)=1} f(p^\nu).$$

N.B.: Si $\varepsilon_{p^\nu}(a)=1$, on notera $\nu=v_p(a)$, analogue de la valuation p-adique usuelle.

ii) Le résultat est le suivant:

Théorème. *Λ satisfaisant aux hypothèses H_1, H_2, H_3, il existe une constante absolue C telle que:*

Pour toute fonction additive $f:\Lambda\to\boldsymbol{C}$, et pour tout x, on a:

$$\frac{1}{x}\sum_{N(a)\le x}\left|f(a)-\sum_{N(p^\nu)\le x}\frac{f(p^\nu)}{N(p^\nu)}\right|^2\le C\sum_{p^\nu\le x}\frac{|f(p^\nu)|^2}{N(p^\nu)}.$$

iii) Applications.

a) La forme duale de l'inégalité de Turan-Kubilius pouvant s'obtenir par la méthode développée par P. D. T. A. Elliott ([1]) à partir de l'inégalité ci-dessus, il est à souligner que cette relation de type "grand crible" demande très peu pour être obtenue.

b) Si Λ satisfait à: