30. Système Involutif d'Opérateurs Effectivement Hyperboliques

Par Tatsuo NISHITANI
Department of Mathematics, College of General Education, Osaka University

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., April 13, 1987)

§1. **Introduction.** Dans cette note, nous étudions l'hyperbolicité du système d'opérateurs pseudo-différentiels (o.p.d. en abrégé) effectivement hyperboliques en involution dans le sense qui sera précisé dans la suite. Soit U une partie ouverte dans $\boldsymbol{R}^{d+1}$. Notons par T^*U le fibré cotangent de U et par $(x', \xi')=(x_1, \cdots, x_d, \xi_1, \cdots, \xi_d)$ des coordonnées naturelles sur T^*U. Soit I un intervalle ouvert dans $\boldsymbol{R}$ et posons $\Omega=I\times U$. On note par $(x, \xi)=(x_0, x', \xi_0, \xi')$ des coordonnées naturelles sur $T^*\Omega$ et on pose

$$D_j=-i(\partial/\partial x_j), \quad j=0, 1, \cdots, d, \quad D=(D_0, D'), \quad D'=(D_1, \cdots, D_d).$$

Soit

$$L(x, D)=\sum_{j=0}^{2} A_j(x, D')D_0^{2-j}, \qquad A_0(x, D')=I_m,$$

un opérateur matriciel du second ordre où $A_j(x, D')$ est la matrice carrée à m colonnes d'o.p.ds. classiques d'ordre j définis près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')\in I\times(T^*U\backslash 0)$. Ici on a noté par I_m la matrice unité d'ordre m. On note par $L_2(x, \xi)$ le symbole principal de $L(x, D)$ et on suppose que $L_2(x, \xi)$ est de diagonal,

$$L_2(x, \xi)=\mathrm{diag}\,(q_1(x, \xi), \cdots, q_m(x, \xi)). \tag{1.1}$$

Nous supposons que $L_2(x, \cdot)$ est hyperbolique par rapport à dx_0 près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')$, c'est-à-dire que l'équation en ξ_0,

$$p(x, \xi_0, \xi')=0, \qquad p(x, \xi)=\mathrm{dét}\, L_2(x, \xi), \tag{1.2}$$

admet $2m$ racines réelles pour tout (x, ξ') près de $(\bar{x}, \bar{\xi}')$. Ici $\mathrm{dét}\, L_2(x, \xi)$ désigne le déterminant de $L_2(x, \xi)$. Dans toute la suite nous supposons que $\rho=(\bar{x}, \bar{\xi})=(\bar{x}, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}')$ est une caractéristique double pour tous $q_i(x, \xi)$;

$$q_i(\rho)=dq_i(\rho)=0, \qquad i\in J=\{1, 2, \cdots, m\}.$$

On désigne par $p_\rho(x, \xi)$ la partie homogène de degré le plus bas dans le développement de Taylor de $p(x, \xi)$ en ρ. On note par $\Gamma(p_\rho, dx_0)$ le cône d'hyperbolicité de p_ρ;

$$\Gamma(p_\rho, dx_0)=\text{la composante de } dx_0 \text{ dans } \{X\in T_\rho(T^*\Omega)\,;\, p_\rho(X)\neq 0\}.$$

On a evidemment

$$\Gamma(p_\rho, dx_0)=\bigcap_{j\in J}\Gamma(q_{j\rho}, dx_0).$$

Puis on désigne par $C(p_\rho, dx_0)$ le cône de la propagation de p_ρ;

$$C(p_\rho, dx_0)=\{X\in T_\rho(T^*\Omega)\,;\, \sigma(X, Y)\leqq 0, \text{ pour tout } Y\in\Gamma(p_\rho, dx_0)\},$$

où σ est la 2-forme symplectique naturelle sur $T^*\Omega$. Soient $\{H_i\}$ $(i=1, \cdots, k)$ un ensemble fini des hyperplans dans $T_\rho(T^*\Omega)$. Nous dirons que $\{H_i\}$ $(i=1, \cdots, k)$ sont en involution si on a