97. *Une justification mathématique pour l'équation de Korteweg-de Vries approchant des ondes longues de surface de l'eau*

Par Tadayoshi KANO*) et Takaaki NISHIDA**)

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Dec. 12, 1985)

1. Introduction. Dans cette Note, on étudie des ondes longues de surface de l'eau s'écoulant d'une vitesse constante. Leur ampleur est petite comparée à la profondeur de l'eau mais finie, c'est-à-dire qu'elle n'est pas infinitesimale. Certaines de ces ondes sont approchées par les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries, d'où une justification mathématique pour cette équation.

2. Le problème de Cauchy non-dimensionnel pour les ondes de surface de l'eau remplissant la région $\Omega(t)=\{(x, y) : x \in \boldsymbol{R},\ 0<y<\Gamma(t, x)\}$ se ramène à déterminer une représentation conforme $z=z(t, \zeta)=x+i\delta y$ de $\Omega(t)\subset \boldsymbol{C}$ sur $\Omega_1=\{\zeta=\xi+i\delta\eta : \xi \in \boldsymbol{R},\ 0<\eta<1\}$ et l'image $\varphi=\varphi(t, \xi, \eta)$ de potentiel de vitesses $\Phi=\Phi(t, x, y)$ par cette représentation, [1], [2].

Pour les ondes longues (voir le paragraphe 1 de [3]) sur les eaux courantes d'une vitesse κ constante, il s'agit en fait du problème de Cauchy pour les équations suivantes sur $\eta=1$:

$$y^1=\frac{A_\delta}{\delta}x^1, \tag{2.1}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_t^1&=\delta^2 w^1 A_\delta x_\xi^1 A_\delta \varphi_\xi^1 - B_\delta(w^1 A_\delta \varphi_\xi^1) - \delta^2 x_\xi^1 B_\delta(w^1 A_\delta \varphi_\xi^1),\\ \varphi_t^1&= -\frac{A_\delta}{\delta}x^1+\frac{\delta^2}{2}w^1((A_\delta\varphi_\xi^1)^2-(\varphi_\xi^1)^2)-\kappa w^1\varphi_\xi^1-\frac{\kappa^2}{2\delta^2}w^1\\ &\quad -(\kappa+\delta^2\varphi_\xi^1)B_\delta(w^1 A_\delta\varphi_\xi^1), \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

où x^1, y^1 et φ^1 sont définies par

$$x=\xi+\delta^2 x^1,\quad y=\frac{A_\delta}{\delta}x=1+\delta^2 y^1,\quad \varphi=-t+\kappa\xi+\delta^2\varphi^1,$$

et $w^1=[(1+\delta^2 x_\xi^1)^2+\delta^4(A_\delta x_\xi^1)^2]^{-1}$, reprenant les notations de [1], [2] et [3].

3. Le système quasi-linéaire par rapport à $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}$, déduit de (2.2), admet une et une seule solution $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(t, \xi\,;\,\delta) \in X_\rho \cap L_\rho^\sigma$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour les données initiales $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(0, \xi) \in X_{\rho_0}\cap L_{\rho_0}^\sigma$.

Puisque $\partial/\partial\xi((\kappa^2/2\delta^2)w^1)$ n'a pas de singularité par rapport à δ, notre solution $\{x_\xi^1, \varphi_\xi^1\}(t, \xi\,;\,\delta)$ est aussi, comme dans [3], indéfiniment différentiable par rapport à $\delta \in [0, 1]$ dans $X_\rho\cap L_\rho^\sigma$, quel que soit $\rho<\rho_0$, pour $|t|<a(\rho_0-\rho)$, et peut être prolongée comme fonction harmonique de $(\xi, \delta\eta)$ pour $(\xi, \eta) \in \Omega_{1+\bar a\rho}=\{(\xi, \eta) : \xi \in \boldsymbol{R},\ 0\leqq\eta<1+\bar a\rho,\ \bar a>0\}$ en tant que telle.

*) Département de Mathématiques, Université d'Osaka, Toyonaka 560.
**) Département de Mathématiques, Université de Kyoto, Kyoto 606.