77. *Dépendance linéaire de fonctions arithmétiques et presque arithmétiques*

Par Noriko HIRATA
Ochanomizu University

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Oct. 14, 1985)

§0. **Résumé.** En 1914, G. Pólya a démontré qu'une fonction entière f qui envoie N dans Z et vérifie

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\log|f|_r}{r} < \log 2$$

est un polynôme [9]. On a noté, comme d'habitude, $|f|_r = \sup_{|z|=r}|f(z)|$.

Ensuite Hardy, Landau, Carlson et Pisot ont étudié les fonctions entières f vérifiant $f(Z)\subset Z$, Gross, Baker [1], Avauissiau et Gay, celles qui vérifient $f(N^m)\subset Z$, et Fukasawa [2], Gel'fond [3], Masser, Gramain [4] [5] celles qui vérifient $f(Z[i])\subset Z[i]$. Citons aussi les travaux de Gramain, Mignotte et Waldschmidt sur les fonctions à valeurs algébriques [6].

Nous étudions ici deux généralisations :

a) Dire qu'une fonction entière f est un polynôme équivaut à dire qu'elle est algébrique, c'est-à-dire que les fonctions

$$z^h\{f(z)\}^k, \qquad (h, k)\in N^2$$

sont linéairement dépendantes. Nous allons considérer une famille finie $f_1, \cdots, f_L$ de fonctions entières à valeurs dans Z. Sous des hypothèses convenables, nous montrons que ces fonctions sont linéairement dépendantes sur Q.

b) Au lieu de supposer que les valeurs des f_j $(1\leqslant j\leqslant L)$ sont entières, on peut supposer seulement qu'elles sont très proches de nombres entiers. On obtient ainsi une généralisation de certains résultats de Pisot.

§1. **Fonctions à valeurs entières.** Soient L et N_0 deux entiers avec $L>N_0>1$, $(\zeta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes deux-à-deux distincts, et $f_1, \cdots, f_L$ des fonctions entières. On définit, pour $N\geqslant 1$, $r(N) = \max_{1\leqslant n\leqslant N}|\zeta_n|$.

Théorème 1.1. *Il existe deux constantes positives c_1 et c_2, ne dépendant que de L et N_0 et que l'on peut expliciter, vérifiant la propriété suivante : si $f_j(\zeta_n)\in Z$ pour $1\leqslant j\leqslant L$, $n\geqslant 1$, et si, pour tout $N\geqslant N_0$, on a*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant L} \log|f_j|_{c_1\cdot r(N)} \leqslant c_2 N, \tag{1}$$

alors les fonctions $f_1, \cdots, f_L$, sont linéairement dépendantes sur Q.

On en déduit une version affaiblie du théorème de Pólya (avec $\log 2$ remplacé par $1/44$) en prenant pour $f_1, \cdots, f_L$ des fonctions

$$\frac{z(z-1)\cdot\cdots\cdot(z-h+1)}{h}\cdot\{f(z)\}^k, \qquad (h, k)\in N^2 ([9]).$$