36. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres. IX*

Par J.-L. MAUCLAIRE
Faculty of Education, Waseda University and C.N.R.S.

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1984)

1. Introduction. Une fonction arithmétique multiplicative est une application $N^* \to C$ vérifiant $f(1)=1$ et $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$ si $(m, n) = 1$.

On sait que l'existence d'une moyenne arithmétique non-nulle $M(f)=\lim_{x\to+\infty}(1/x)\sum_{n\le x} f(n)$ assortie d'une condition limitant la croissance de $|f(n)|^\alpha$ est équivalente à l'énoncé suivant:

(A): Pour tout $c>0$, les quatre séries suivantes

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_{|f(p)-1|<c} \frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{|f(p)-1|<c} \frac{|f(p)|^\alpha}{p},$$

$$\sum_p \sum_{k\ge 2} \frac{|f(p^k)|^\alpha}{p^k}, \quad \alpha \ge 1 \text{ fixé},$$

sont convergentes et pour tout p, l'expression $\pi_p = \sum_{k\ge 0}(f(p^k)/p^k)$ est non-nulle, p décrivant l'ensemble des nombres premiers.

(Pour un exposé général, voir [1], où la plupart des résultats obtenus à ce sujet sont présentés.)

Dans le cas où les conditions (A) son satisfaites, la fonction f est limite-périodique au sens de Besicovich pour l'exposant α. Les seules améliorations possibles pour ce genre d'énoncé ne peuvent porter que sur la limitation de la croissance de $|f(n)|^\alpha$, et il est tentant de chercher une condition minimale. Ajoutons aussi que l'on a cherché une méthode d'étude de ce genre de question dans un cadre d'analyse fonctionnelle. (Pour une réponse partielle, voir [2].) Enfin, mentionnons que tous les beaux résultats qui ont été établis pour les fonctions multiplicatives sur les entiers, possédant une moyenne non-nulle et satisfaisant à une bonne condition de limitation de croissance de leur module, n'ont pas permis d'élucider le sens des conditions (A), qui peuvent se définir pour n'importe quel système d'entiers généralisés de Beurling.

On se propose ici de présenter un résultat à ce sujet ainsi que le principe de démonstration essentiellement nouveau suivant lequel il s'établit, qui semble assez bien répondre aux préoccupations ci-dessus exposées. Pour des raisons de commodité et de clarté, on se restreint au cas des fonctions multiplicatives à une variable sur les entiers ordinaires, avec $\alpha=1$. Précisons cependant que la méthode est générale et qu'une version étendue du résultat ici présenté figurera