9. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* VII

Par J.-L. MAUCLAIRE
C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Jan. 12, 1983)

Une fonction additive est une application $f: N^* \to C$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ si $(m, n) = 1$.

On dit qu'une fonction additive réelle f admet une distribution asymptotique σ_f s'il existe une fonction de distribution σ_f telle que, en tout point de continuité x de σ_f, on ait :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leq N \\ f(n)<x}} 1 = \sigma_f(x).$$

On se propose ici d'établir le résultat suivant :

Théorème. *Soit f une fonction additive réelle admettant une distribution asymptotique σ_f. Alors, en tout point de continuité x de σ_f, la suite $I_x(n)$ définie par*

$$I_x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(n) < x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est limite-périodique et sa série de Fourier ne comporte que des "sommes de Ramanujan" usuelles.

Preuve. Soit x un point de continuité de σ_f. On pose :

$$f_y(n) = \sum_{\substack{p^B // n \\ p^B \leq y}} f(p^B),$$

$$f^*(n) = \sum_{p/n} f(p),$$

$$f_y^*(n) = \sum_{\substack{p/n \\ p\leq y}} f(p).$$

On définit $I_{x,y}(n)$ par :

$$I_{x,y}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_y(n) < x \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $f_y(n)$ est périodique et que sa série de Fourier ne comporte que des "sommes de Ramanujan" usuelles, pour établir le théorème, il suffira de démontrer que :

$$\lim_{y\to+\infty} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} |I_{x,y}(n) - I_x(n)| = 0.$$

1. On établit d'abord :

(1) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \limsup_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\leq N \\ |f_y(n)-f(n)|>\varepsilon}} 1 = 0.$

En effet, on a