# 33. *Sommes de Gauss modulo $p^{\alpha}$.* I

Par J.-L. MAUCLAIRE
C.N.R.S. et Université Waseda

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., March 12, 1983)

1. Soit $p$ un nombre premier, $\alpha$ un entier $>1$, $\chi$ un caractère primitif modulo $p^{\alpha}$. On définit la somme de Gauss $\tau(\chi)$ mod $p^{\alpha}$ par

$$\tau(\chi)=\sum_{x\in(\boldsymbol{Z}/p^{\alpha}\boldsymbol{Z})^{\times}}\chi(x)\exp\left(2i\pi\frac{x}{p^{\alpha}}\right).$$

On se propose de donner ici le résultat suivant:

**Théorème 1.** *$p$ étant un nombre premier impair, et $\alpha$ un entier $>1$, $\chi$ un caractère primitif modulo $p^{\alpha}$, alors*

1. *Si $\alpha=2k$, on pose $\chi(1+p^{k})=\exp(-2i\pi(h/p^{k}))$, où $0<h<p^{k}$ (et $(h,p)=1$ puisque $\chi$ est primitif). Alors, pour tout $L\equiv h \bmod p^{k}$, on a*

$$\tau(\chi)=p^{k}\chi(L)\exp\left(2i\pi\frac{L}{p^{2k}}\right).$$

2. *Si $\alpha=2k+1$, on détermine de façon unique un entier $h$ par les relations*

$$\chi(1+p^{k}+2^{*}p^{2k})=\exp\left(-2i\pi\frac{h}{p^{k+1}}\right),$$

*$0\leq h\leq p^{k+1}$ (et $(h,p)=1$ car $\chi$ est primitif), où $2^{*}2\equiv 1$ modulo $p$. Alors, pour tout $L\equiv h \bmod p^{k+1}$, on a*

$$\tau(\chi)=p^{k+1/2}\exp\left(2i\pi\frac{L}{p^{2k+1}}\right)\cdot\chi(L)\cdot\varepsilon_{p}\left(\frac{2L}{p}\right)$$

*où $\varepsilon_{p}=1$ si $p\equiv 1$ (4), $i$ si $p\equiv 3 \bmod 4$, et $(\cdot/p)$ est le symbole de Legendre.*

On peut donner une formulation qui condense le Théorème 1 de la façon suivante:

**Théorème 1. bis.** *Soient $p$ premier impair, $k>1$, $\chi$ un caractère primitif modulo $p^{k}$, $Z_{p}^{*}$ le groupe multiplicatif des unités de $Z_{p}$, $\Gamma_{p-1}$ le sous-groupe cyclique d'ordre $p-1$ de $Z_{p}^{*}$, ce qui fait que $\chi$, considéré comme caractère sur $Z_{p}^{*}$ trivial sur $(1+p^{k}Z_{p})$ s'identifie pour $\varepsilon\in\Gamma_{p-1}$, $u\in Z_{p}$ à $\chi(\varepsilon(1+pu))=\psi(\varepsilon)\exp(-2i\pi(h/p^{k}))\log(1+pu)$, où $(h,p)=1$, $h$ fixé, $0<h<p^{k-1}$, $\psi$ est un caractère $\bmod p$ fixé, $\log(\cdot)$ est le logarithme p-adique usuel. Comme $h\in Z_{p}$, $h$ s'écrit:*

$$h=\eta(1+p\tilde{h}),\quad \eta\in\Gamma_{p-1},\quad \eta\equiv h \bmod p,\quad \tilde{h}\in Z_{p}.$$

*Alors on a pour la somme de Gauss $\tau(\chi) \bmod p^{k}$*

$$\tau(\chi)=p^{k/2}\cdot\left(\frac{2h}{p}\right)^{k}\cdot\varepsilon_{p}^{k^{2}}\cdot\psi(h)\cdot\exp\left(-2i\pi\frac{h}{p^{k}}\right)\log\left(\frac{1+p\tilde{h}}{e_{p}}\right),$$