83. *Über die rationalen Nullstellen der von Potenzsummen der natürlichen Zahlen definierten Polynome*

Von Noriaki KIMURA[*] und Hardmud SIEBERT[**]

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., Sept. 12, 1980)

Für $k \in N$ seien die Polynome $P_k(x) \in Q[x]$ erklärt durch

$$P_k(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^k \qquad \text{für alle } n \in N, \tag{1}$$

also zum Beispiel

$$P_1(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{3}x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)^2$$

$$\vdots \qquad .$$

Wir untersuchen die Nullstellen der Polynome $P_k(x)$. Auf der Zahlentheorie-Tagung in Oberwolfach 1975 stellte J. L. Nicolas die Frage, ob sämtliche Nullstellen der $P_k(x)$ rational sind. Das kann, wie schon das Beispiel

$$P_4(x) = \frac{1}{5}x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x-\frac{1}{3}\right)$$

zeigt, nicht der Fall sein. Im Gegenteil stellt sich heraus, daß kein $P_k(x)$ andere rationale Nullstellen haben kann als die bereits bei $P_1(x)$, $P_2(x), P_3(x)$ vorkommenden Nullstellen $x=0$, $x=-1$, $x=-1/2$. Genauer zeigen wir:

Satz 1. *Es ist*

$$P_k(0) = 0 \qquad \textit{für } k \geq 1 \tag{2}$$

$$P_k(-1) = 0 \qquad \textit{für } k \geq 1 \tag{3}$$

$$P_k\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \textit{für } k \geq 2,\ 2 \mid k. \tag{4}$$

Satz 2. *Die Nullstelle bei $x=-1/2$ ist stets einfach. Die Nullstellen bei $x=0$ und $x=-1$ sind für $k \geq 3$, $2 \nmid k$ doppelt und in den übrigen Fällen einfach.*

Satz 3. *Alle anderen Nullstellen der $P_k(x)$ außer $x=0$, $x=-1$,*

---

*) College of Industrial Technology, Nihon University, Izumi-cho, Narashino-shi, Chiba 275, Japan.

**) Universität Ulm (MNH), Abt. für Mathematik III. Oberer Eselsberg, 7900 Ulm (Donau) B.R.D.