52. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* II

Par J.-L. MAUCLAIRE
Pensionnaire à la Maison franco-japonaise

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1980)

On conserve les notations de la Note I de même titre. Les résultats établis dans la-dite note permettent de démontrer le théorème suivant:

Théorème 4.1. *Soit f une fonction multiplicative complexe, i.e.:* $f: N^* \to C$ *et* $f(mn)=f(m)f(n)$ *si* $(m,n)=1$.

Si l'on a:

(H.1) *Il existe un* $\alpha>1$ *tel que:*

(H.1.1): $F_\alpha(s)=\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{|f(n)|^\alpha}{n^s}$ *converge pour* $\mathbf{Re}\, s>1$.

(H.1.2): $\limsup_{\substack{\sigma\to 1\\ \sigma>1}} (\sigma-1)F_\alpha(\sigma)<+\infty$.

(H.2) *Il existe un chemin* Γ *donné par* $\gamma: [0,1]\to C$, γ *continue, satisfaisant à:*

$$\mathbf{Re}\,\gamma(t)>1 \quad si\ t\neq 1, \quad \gamma(1)=1 \quad et \limsup_{t\to 1} \frac{|I(m)\gamma(t)|}{\mathrm{Re}\,\gamma(t)-1}<+\infty,$$

pour lequel:

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s\in\Gamma}} (s-1)\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s} \qquad existe\ et\ est\ non\ nulle.$$

Alors

(C) *les sommes ou séries suivantes convergent:*

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_{|f(p)|\leqslant 2}\frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{|f(p)|>2}\frac{|f(p)|^\alpha}{p}, \quad \sum_p\sum_{r\geqslant 2}\frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^r},$$

et de plus, pour tout p,

$$1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{f(p^k)}{p^k}\neq 0.$$

Réciproquement, les conclusions énoncées dans C impliquent les hypothèses H.

De plus, la moyenne de f existe, et l'on a:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)=\sum_{\substack{s\to 1\\ \mathrm{Re}\ s>1}} (s-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\times\sum_{k\geqslant 0}\frac{f(p^k)}{p^k}.$$

Esquissons brièvement la démonstration du Théorème.

1° Tout d'abord, on démontre que moyennant (H), pour tout p, la série $\sum_{k\geqslant 0} f(p^k)/p^{ks}$ définit une fonction holomophe dans un voisinage de 1, et non nulle dans ce voisinage.