41. *Suites limite-périodiques et théorie des nombres.* I

Par J.-L. MAUCLAIRE
Pensionnaire à la Maison franco-japonaise

(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., April 12, 1980)

Une suite $f:\boldsymbol{N}^*\to\boldsymbol{C}$ est dite *limite-périodique* B^λ, $\lambda\geqslant 1$, si pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver une suite périodique $P_\varepsilon(n)$ telle que:

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}|P_\varepsilon(n)-f(n)|^\lambda\leqslant\varepsilon.$$

On a remarqué depuis longtemps que ces suites jouent un rôle important dans l'étude des propriétés des fonctions arithmétiques. (On peut consulter, par exemple, les articles mentionnés dans les références, ainsi que leurs bibliographies.) On se propose de donner ici des résultats généraux sur les suites limite-périodiques ; les applications à la théorie des fonctions arithmétiques feront l'objet d'une note ultérieure.

1. Notations. $\boldsymbol{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $0,1,2,\cdots$, $\boldsymbol{N}^*=\boldsymbol{N}-\{0\}$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers de $\boldsymbol{N}$. p désignera un nombre premier. $\boldsymbol{Z}_p$ est le complété p-adique de $\boldsymbol{Z}$, dm_p la mesure invariante sur $\boldsymbol{Z}_p$. $\boldsymbol{Z}_p^*$ est le groupe compact des unités de $\boldsymbol{Z}_p$, dm_p^* sa mesure invariante. Posons

$$G=\prod_{p\in\mathcal{P}}\boldsymbol{Z}_p,\quad dm=\bigotimes_p dm_p,\quad G^*=\prod_{p\in\mathcal{P}}\boldsymbol{Z}_p^*,\quad dm^*=\bigotimes_p dm_p^*.$$

Si A et B sont deux espaces topologiques, $\mathcal{C}(A,B)$ est l'ensemble des applications continues $A\to B$.

Soit $\lambda\geqslant 1$. On notera $\mathcal{B}^\lambda$ l'ensemble des classes de fonctions $\boldsymbol{N}^*\to\boldsymbol{C}$ qui sont B^λ limite-périodiques ; on a $f\equiv g$ dans $\mathcal{B}^\lambda$ si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}|f(n)-g(n)|^\lambda=0.$$

On sait que B^λ est complet, et le spectre d'un élément de $\mathcal{B}^\lambda$ est inclus dans $\boldsymbol{Q}\cap[0,1[$.

Si E est localement compact, si ν est une mesure sur E, on pose $L^\lambda(E,d\nu)$ l'ensemble des classes de fonctions $E\to\boldsymbol{C}$ de puissance $\lambda^{\text{ième}}$ ν-intégrable.

Si Γ est un groupe compact, $\hat{\Gamma}$ sera le dual de Γ.

2. Le résultat essentiel est le suivant:

Théorème 2.1. *$L^\lambda(G,dm)$ s'identifie à $\mathcal{B}^\lambda$.*

De façon précise: Les coefficients de Fourier d'un élément f' de $\mathcal{B}^\lambda$ (qui caractérisent cet élement) sont la transformée de Fourier d'un élément f de $L^\lambda(G,dm)$, et réciproquement. On a de plus: