91. Existence de Solutions Locales pour Quelques Opérateurs Différentiels

Par Mutsuhide MATSUMURA
Université de Kyoto

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1961)

1. *Introduction.* Nous savons que l'équation aux dérivées partielles:

$$P(x, D)u=f$$

n'admet pas toujours une solution (locale) pour toute f donnée (voir [5]). Les travaux récents de M. L. Hörmander [2], [3] ont élucidé cette situation de la manière suivante:

Soit $C_{2m-1}(x, D)$ la partie homogène d'ordre $2m$-1 dans le commutateur $\bar{P}_m(x, D)\cdot P_m(x, D)-P_m(x, D)\cdot\bar{P}_m(x, D)$ où $\bar{P}_m$ est l'opérateur obtenu en prenant la conjugaison complexe des coefficients de la partie principale P_m de P.

a) Il existe un voisinage $\Omega_\eta=\{x; |x-x^0|\langle\eta\}$ d'un point x^0 tel que l'équation $P(x, D)u=f$ admet toujours une solution $u\in L^2(\Omega_\eta)$ pour toute $f\in L^2(\Omega_\eta)$, si $P(x, D)$ satisfait à deux conditions suivantes

1° $$\sum_j\left|\frac{\partial P_m}{\partial\xi_j}(x^0, \xi)\right|^2\neq 0 \qquad \text{pour tout } \xi\neq 0.^{1)}$$

2° On peut trouver un polynôme $Q(x, \xi)$ de degré $m-1$ en ξ tel qu'on ait

$$C_{2m-1}(x, \xi)=\bar{Q}(x, \xi)P_m(x, \xi)+Q(x, \xi)\bar{P}_m(x, \xi)$$

dans un voisinage de x^0 et pour tout ξ.

b) Pour que l'équation $P(x, D)u=f$ ait une solution $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ pour toute $f\in\mathcal{D}(\Omega)$, il faut que $C_{2m-1}(x, \xi)=0$ si $P_m(x, \xi)=0$ $x\in\Omega, \xi$. Le but de cette Note est d'étendre les résultats ci-dessus en interprétant du point de vue des caractéristiques. Plus précisément, M. Hörmander a traité des opérateurs à caractéristiques simples réelles. Par contre, nous traiterons des opérateurs à caractéristiques multiples réelles. Mais nous sommes obligés en essence de nous borner au cas où les multiplicités sont invariantes par rapports à x et ξ.

2. Commençons par le cas élémentaire et d'ailleurs fondamental:

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda$$

où H est un opérateur intégral singulier de classe

1) ξ désignera dans la suite toujours un vecteur réel.