50. Zur konformen Abbildung zweifach zusammen hängender Gebiete, III.

Von Yûsaku KOMATU.

Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(C mm. by S. KAKEYA, M.I.A., June, 12, 1945.)

B. Grenzübergang zum Falle des einfachen Zusammenhanges.

Wir haben in den früheren Noten[1] explizite Gestalten verschiedener spezieller Abbildungsfunktionen vom konzentrischen Kreisringe R: $q<|z|<1$ gewonnen. Es liegt nahe zu erwarten, daß beim Grenzübergange $q\to 0$ solche Abbildungsfunktionen vom Grundgebiete R in die entsprechenden Funktionen vom Einheitskreise $|z|<1$ übergehen. Wir sollen dies zwar in dieser Note beispielsweise insbesondere für die Funktionen $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$ und $\omega_r(z;z_\infty,z_0)$ näher untersuchen.

1. *Die Funktion* $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$.

Wie in I, **A**, § 3 oder § 4 gezeigt wurde, läßt sich die die Kreisbogenschlitzabbildung von R vermittelnde Funktion durch

$$\omega_k(z;z_\infty,z_0)=\frac{i}{z_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{\frac{2\eta_1}{\pi}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|}$$

$$\times\frac{\sigma\left(i\lg\dfrac{z}{z_0}\right)\sigma(i\lg\bar z_\infty z)\sigma(i\lg\bar z_0 z_\infty)}{\sigma\left(i\lg\dfrac{z}{z_\infty}\right)\sigma\left(i\lg\dfrac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma(i\lg|z_\infty|^2)\sigma(i\lg\bar z_0 z)}$$

liefern. Für σ-Funktionen gilt aber bekanntlich im allgemeinen bei $q\to 0$ die Limesrelation

$$\sigma(i\lg x)\to -i\exp\left(\frac{1}{24}\lg^2 x\right)\cdot\frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

und $\eta_1\to\dfrac{\pi}{12}$. Infolgedessen erhalten wir ohne weiteres die entsprechende Limesbeziehung für die Funktion $\omega_k(z;z_\infty,z_0)$:

$$\omega_k(z;z_\infty,z_0)\to\frac{i}{z_\infty}\exp\Bigg[\frac{1}{6}\lg\left|\frac{z_\infty}{z_0}\right|\lg\frac{z}{z_\infty}$$

$$-\frac{1}{24}\left\{(\lg^2\bar z_\infty z-\lg^2|z_\infty|^2)+\left(\lg^2\frac{z}{z_0}-\lg^2\frac{z_\infty}{z_0}\right)-(\lg^2\bar z_0 z-\lg^2\bar z_0 z_\infty)-\lg^2\frac{z}{z_\infty}\right\}\Bigg]$$

$$\times\frac{1-\bar z_\infty z}{\sqrt{\bar z_\infty z}}\,\frac{|z_\infty|}{1-|z_\infty|^2}\,\frac{z_0-z}{\sqrt{z_0 z}}\,\frac{\sqrt{z_0 z_\infty}}{z_0-z_\infty}\,\frac{1-\bar z_0 z_\infty}{\sqrt{\bar z_0 z_\infty}}\,\frac{\sqrt{\bar z_0 z}}{1-\bar z_0 z}\,i\,\frac{\sqrt{z_\infty z}}{z_\infty-z}$$

$$=\frac{1-\bar z_\infty z}{1-|z_\infty|^2}\,\frac{z_0-z}{z_0-z_\infty}\,\frac{1-\bar z_0 z_\infty}{1-\bar z_0 z}\,.$$

1) Derselbe Titel, I. Proc. **21** (1945), 285–295; II. Proc. **21** (1945), 296–307.