45. *Zur konformen Abbildung zweifach zusamenhängender Gebiete, II.*

Von Yûsaku KOMATU.

Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1945.)

A. Einige spezielle Abbildungsfunktionen. (Fortsetzung.)[1]

7. *Grunskysche Spezialfunktion* $\mathfrak{g}(z\,;z_0)$.

Grunsky hat in seiner schönen Arbeit[2] verschiedene tiefliegende Resultate bezüglich der konformen Abbildung allgemeiner endlich-vielfach zusammenhängender Gebiete hergeleitet, mit welchen wir uns später näher im Einzelnen beschäftigen wollen. Darin spielen gewisse spezielle Funktionen die wichtige Rolle von Extremalfunktionen. Wir sollen zuerst u. a. die von ihm eingeführte Funktion $\mathfrak{g}(z;z_0)$ bei unsrem Falle des zweifach zusammenhängenden normalen Grundgebiets R spezialisieren.

Die im R analytische Funktion $\mathfrak{g}(z\,;z_0)$ mit einem Parameter $z_0(q<|z_0|<1)$ werde defimtionsgemäß durch folgende Eigenschaften charakterisiert: sie verhalte sich in R regulär und eindeutig, verschwinde nirgends bis auf eine einzige einfache Nullstelle z_0, besitze ferner konstante Absolutbeträge auf beriden Randperipherien $|z|=q$ und $|z|=1$, welche mit H_0 bzw. H_1 bezeichnet werden sollen, und werde schließlich an z_0 so normiert, daß ihr erster Laurentscher Koeffizient an z_0 gleich 1 sei, d. h. in unsrem Falle $z_0 \neq \infty$ so, daß $\mathfrak{g}'(z_0;z_0)=1$ sei.

Für derartige Funktionenklasse bleibt noch eine Wilkürlichkeit übrig, nämlich die Umlaufszahlen π_0 und π_1 bezüglich $|z|=q$ bzw. $|z|=1$:

$$\pi_0=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=q} d\arg \mathfrak{g}(z\,;z_0),\qquad \pi_1=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1} d\arg \mathfrak{g}(z\,;z_0).$$

Da aber jede Funktion $\mathfrak{g}(z\,;z_0)$ eine einzige einfache Nullstelle besitzen muß und folglich das Bildgebiet von R immer den Punkt $\omega=0$ gerade einmal überdecken muß, so bleibt dazwischen die Relation

$$\pi_0+\pi_1=1$$

notwendig bestehen. Sie enthält also weiter im wesentlichen einen einzigen Parameter. Bezichnen wir insbesondere beide speziellen Funktionen unter ihnen,

1) I. Proc. **21** (1945), 285.

2) H. Grunsky, Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schriften d. math. Sem. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **1** (1932-3), 95-140.