23. Über nilpotente topologische Gruppen, I.

Von Kenkiti IWASAWA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1945.)

In der abstrakten Gruppentheorie spielen bekanntlich die höheren Kommutatorgruppen, die absteigenden bzw. die aufsteigenden Zentralreihen wichtige Rollen. Sie charakterisieren besondere Klassen von Gruppen, nämlich auflösbare bzw. nilpotente Gruppen, deren Struktur, vor allem bei endlichen Gruppen, eingehend untersucht worden ist[1]. Dementsprechend sollen im folgenden die Kommutatorgruppen und die Zentralgruppen auch für topologische Gruppen definiert werden und dann die Struktur der auflösbaren bzw. der nilpotenten topologischen, insbesondere kompakten Gruppen untersucht werden.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine separable topologische Gruppe und $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$,...... (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{H}}$, $\overline{\mathfrak{A}}$,......bzw. $[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]$,......die abgeschlossenen Hüllen bzw. die abstrakten Kommutatorgruppen (im Sinne der abstrakten Gruppentheorie)[2] solcher Untergruppen. Es gilt dann wie leicht ersichtlich

$$\overline{[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]} = \overline{[\overline{\mathfrak{H}}, \overline{\mathfrak{A}}]}. \tag{1}$$

Wir nennen $\overline{[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]}$ die *topologische Kommutatorgruppe* von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$.

Nun ersetzten wir die gewöhnlichen Kommutatorgruppen durch die topologischen und definieren die topologischen höheren Kommutatorgruppen $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})$ bzw. die topologischen absteigenden Zentralgruppen $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})$ folgendermassen. Es sei

$$\mathfrak{D}^*_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{Z}^*_0(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}$$

und für jede Ordnungszahl η mit $\eta < \xi$ sei $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})$ schon definiert. Ist $\xi = \eta + 1$, so setze man $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})$ gleich der topologischen Kommutatorgruppe von $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ bzw. von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})$, und wenn ξ eine Limeszahl ist, so sei $\mathfrak{D}^*_\xi(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\xi(\mathfrak{G})$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{D}^*_\eta(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_\eta(\mathfrak{G})$ mit $\eta < \xi$.

Nach (1) kann man durch Induktion leicht beweisen, dass $\mathfrak{D}^*_n(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{Z}^*_n(\mathfrak{G})$ für eine natürliche Zahl n der Abschliessung der gewöhnlichen höheren

---

1) Vgl. z. B. P. Hall, A contribution to the theory of groups of primepower orders, Proc. Lond. Math. Soc. II **36** (1933); R. Raer, Nilpotent groups and their generalizations, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. **47** (1940).

2) $[\mathfrak{H}, \mathfrak{A}]$ ist die von $(h, u) = huh^{-1}u^{-1}$, $h \in \mathfrak{H}$, $u \in \mathfrak{A}$ erzeugte Gruppe.