22. La géométrie des espaces métriques fondés sur la notion d'aire I.

Par Hideyuki IWAMOTO.

Institut Mathématique, Université Impériale de Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M. I. A., March 12, 1945.)

1. Le problème dont je vais m'occuper ici est la recherche des espaces métriques fondés sur l'intégrale multiple,

$$O=\int L(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}, \cdots, \frac{\partial^M x^i}{\partial u^{\lambda_1}\cdots\partial u^{\lambda_M}})\, du^1\cdots du^K, \ (1\leqq K\leqq N-1)$$

Dans le première partie de cette Note, nous allons étudier la géométrie fondée sur l'intégrale multiple

$$O=\int L(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda})du^1\cdots du^K. \tag{1.1}$$

Considérons un espace de Riemann dont la forme quadratique fondamentale est:

$$ds^2=g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

Un sous espace U^K dans V^N peut être défini par les équations paramétriques:

$$x^i=x^i(u^1, \cdots, u^K). \tag{1.2}$$

Alors, le volume d'une portion de surface (1.2) est donné par l'expression

$$O=\int L(x, \frac{\partial x}{\partial u})du^1\cdots du^K,$$

où nous avons pose

$$L=\sqrt{det\| g_{\lambda\mu}\|}, \ g_{\lambda\mu}=p^i_\lambda p^j_\mu g_{ij}, \ p^i_\lambda=\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}$$

En définissent le tenseur $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}$ par $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}=g_{(i_1(j_1}\cdots g_{j_K)i_K)}$ on obtient

$$L^2=K!\, g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}\, p^{i_1\cdots i_K}\, p^{j_1\cdots j_K},$$

où nous avons pose

$$p^{i_1\cdots i_K}=p^{i_1}_{(1}\cdots p^{i_K}_{K)}.$$

Nous allons démontrer que les composantes $g_{i_1\cdots i_K j_1\cdots j_K}$ sont les polynomes en L, $p^\lambda_i=\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial p^i_\lambda}$, $p^{\lambda}_i{}^{\mu}_j=\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial p^i_\lambda\, \partial p^j_\mu}$. Les relations

$$(L)^2=|p^i_\mu p^j_\mu g_{ij}|, \ p^i_\lambda=\frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}$$

nous donnent