

34. Über die Zerfällung des Irreduziblen Matrizensystems.

Von Junjiro OGAWA, Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., June 12, 1946.)

Bekanntlich handelt es sich in der Theorie der Gruppendarstellung um die Aufgabe, durch eine geeignete Erweiterung des Grundkörpers eine irreduzible Darstellung dort zu zerlegen.⁽¹⁾ In der vorliegenden Note betrachten wir ein etwas allgemeineres Problem, wie man ein irreduzible Matrixsystem in seine absolut irreduziblen Bestandteile zerlegen kann.

§1. $\mathfrak{G} = \{S\}$ sei ein Matrixsystem n -ten Grades in einem Körper P der Charakteristik 0. Eine Matrix A n -ten Grades in P , die mit jedem Element S aus \mathfrak{G} elementweise vertauschbar ist, nennen wir die Kommutatormatrix von dem System \mathfrak{G} . Die Gesamtheit der Kommutatormatrizen von \mathfrak{G} bildet offenbar einen Matrizenring \mathfrak{A} über P .

Es gilt nun der folgende

HILFSSATZ.⁽²⁾ Wenn das System \mathfrak{G} in P irreduzibel ist, dann ist der Kommutatorring \mathfrak{A} von \mathfrak{G} eine Divisionsalgebra, m. a. W., \mathfrak{A} ist isomorph zu einer abstrakten Divisionsalgebra über P .

BEWEIS: Sehen wir das System \mathfrak{G} als ein System der linearen Transformationen im n -dimensionalen linearen Vektorgebilde⁽³⁾ \mathfrak{M} über P an, dann ist die Tatsache, dass \mathfrak{G} irreduzibel in P ist, nicht anders als dass jedes Teilgebilde \mathfrak{N} aus \mathfrak{M} , das invariant gegenüber jedem Element S aus \mathfrak{G} ist, entweder \mathfrak{N} selbst oder Null ist. Nun gilt aber für ein A aus \mathfrak{A} und jedes S aus \mathfrak{G}

$$S(A(\mathfrak{M})) = A(S(\mathfrak{M})) \leq A(\mathfrak{M}) .$$

Das Teilgebilde $A(\mathfrak{M})$ aus \mathfrak{M} ist also invariant gegenüber jedem Element S aus \mathfrak{G} , daher $A(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ oder $A(\mathfrak{M}) = 0$, d. h. wenn die Matrix A nicht eine Nullmatrix ist, ist A nichtsingulär. W. Z. B. W.

Nun sehen wir die Kommutatormatrix A als die Darstellungsmatrix des Elementes a aus einer abstrakten Divisionsalgebra \mathfrak{b} über P an. Ist $m(u)$ das irreduzible Polynom (dessen Koeffizient des Gliedes vom höchsten Grade e

(1) A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.

Dritte Aufl. 1937. Kapitel 11-14.

(2) Hermann Weyl, Classical Groups, their invariants and representations, 1939. S. 81.

(3) O. Schreier und E. Sperner, Vorlesungen über Matrizen. 1932.

O. Schreier und E. Sperner, Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra Erster Band, 1931; Zweiter Band, 1935.