33. Quelques remarques sur les groupes de transformations dans les espaces à connexion lineaires IV.[1]

Par Kentaro YANO et Yasuro TOMONAGA.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., June 12, 1946.)

§ 4. *Transformations conformes dans les espaces de Riemann.*

Dans un espace de Riemann V_n dont la forme quadratique différentielle fondamentale est donnée par

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu\,, \tag{4.1}$$

considérons une transformation infinitésimale

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda(x)\,\delta t \tag{4.2}$$

qui déplace chaque point (x^λ) de V_n en un autre point $(\bar{x}^\lambda)$ du même espace infiniment voisin de (x^λ), δt étant une constante infinitésimale.

On sait que le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, les symboles de Chritoffel $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ et le tenseur de courbure $R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ subissent, pendant cette transformation infinitésimale, les changements respectivement donnés par

$$Dg_{\mu\nu} = (Xg_{\mu\nu})\,\delta t = (\xi^a g_{\mu\nu;a} + \xi^a_{;\mu} g_{a\nu} + \xi^a_{;\nu} g_{\mu a})\,\delta t = (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu})\,\delta t, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} D\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\} &= (X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})\,\delta t = \frac{1}{2} g^{\lambda a}[(Xg_{a\mu})_{;\nu} + (Xg_{a\nu})_{;\mu} - (Xg_{\mu\nu})_{;a}]\,\delta t \\ &= (\xi^\lambda_{;\mu;\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\,\xi^\omega)\,\delta t, \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} DR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} &= (XR^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega})\,\delta t = [(X\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\})_{;\omega} - (X\{{}^{\lambda}_{\mu\omega}\})_{;\nu}]\,\delta t \\ &= [\xi^a R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega;a} - \xi^\lambda_{;a} R^{a}_{\cdot\mu\nu\omega} + \xi^a_{;\mu} R^{\lambda}_{\cdot a\nu\omega} + \xi^a_{;\nu} R^{\lambda}_{\cdot\mu a\omega} + \xi^a_{;\omega} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu a}]\,\delta t, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où ξ_μ désigne les composantes covariantes du vecteur ξ^λ et le point-virgule la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$.

En général, la dérivée de Lie d'une densité, $T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}$ par exemple, du poids p sera définie par

$$\begin{aligned} DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} &= (XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})\,\delta t \\ &= [\xi^a T^{\lambda}_{\cdot\mu\nu,a} - \xi^\lambda_{,a} T^{a}_{\cdot\mu\nu} + \xi^a_{,\mu} T^{\lambda}_{\cdot a\nu} + \xi^a_{,\nu} T^{\lambda}_{\cdot\mu a} + pT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}\,\xi^a_{,a}]\,\delta t, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ou la virgule désigne la dérivée partielle ordinaire. Il est à remarquer que la dérivée de Lie (4.6) est indépendante de la métrique de l'espace et par suite de la connexion affine de l'espace, mais on peut aussi écrire (4.6) sous une forme tensorielle:

$$DT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} = (XT^{\lambda}_{\cdot\mu\nu})\,\delta t \tag{4.7}$$

---

(1) Les Notes I, II, et III ont été publiées dans ces Proc., *20* (1946), 41-47; 67-72; 167-172.