

64. Zur konformen Abbildung vielfach zusammenhängender Gebiete.

Von Yūsaku KOMATU.

Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., Dec. 12, 1946.)

1. Wir betrachten zunächst schlichte konforme Abbildungen eines $n + 2$ fach zusammenhängenden Normalgebietes auf der z -Ebene, welches dadurch entsteht, daß man einen konzentrischen Kreisring $R_0 < |z| < R_1$ längs n Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $z = 0$ aufschlitzt, auf Gebiete auf der w -Ebene, die durch ganze Peripherien $|w| = P_0$ und $|w| = P_1$ sowie n irgendwelche Randkomponenten innerhalb des Kreisringes $P_0 < |w| < P_1$ begrenzt; dabei sollen beide Peripherien der Kreisringe miteinander entsprechen. Setzen wir zur Abkürzung

$$(1) \quad R = \frac{R_1}{R_0}, \quad P = \frac{P_1}{P_0},$$

so gilt nach einem Satze von Grötzsch¹⁾ die Verzerrungsungleichung

$$(2) \quad R \leq P,$$

und wenn wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf derartige Abbildungen beschränken, welche die Randkomponenten $|z| = R_0$ und $|w| = P_0$ miteinander entsprechen lassen, besteht das Gleichheitszeichen in (2) dann und nur dann, falls die Abbildung durch $w = cz$ vermittelt wird; hierin bedeutet c eine Konstante mit absolutem Betrag P_0/R_0 . Bei jeder Extremalabbildung entsteht also das Bildgebiet aus dem Urgebiet durch eine Drehstreckung um den Koordinatenursprung. Aus der letztgenannten Tatsache mögen wir vermuten, daß, wenn ein Bildgebiet angenähert dieselbe Gestalt besitzt wie das Urgebiet, so das Verhältnis $R:P$ fast gleich Eins sein muß.

Andererseits können wir aber als Normalgebiet auf der z -Ebene statt eines Kreisbogenschlitzgebiet innerhalb eines Kreisringes auch ein Parallelschlitzgebiet mit der Neigung Null, d. h. ein längs einigen zur reellen Achse parallelen Strecken aufgeschlitztes Gebiet annehmen. Dann genügt jede schlichte Abbildungsfunktion solches Gebietes, welche um $z = \infty$ die Entwicklung der Gestalt

1) H. Grötzsch, Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, I. Leibziger Ber. 80 (1928), 267-376; II. Ibid., 497-502. Vgl. auch E. Rengel, Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung. Schriften d. Math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin I (1932/3), 141-162.