63. Note sur le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-spaces riemanniens.

Par Kentaro YANO et Yosio MUTÔ.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M. I. A., Dec. 12, 1946.)

§ 0. Dans un Mémoire précédent,(1) nous avons traité le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens, et obtenu cinq équations tensorielles conformes comme la condition nécessaire et suffisante pour que trois tenseurs donnés déterminent un sous-espace plongé dans un espace euclidien et dont les tenseurs fondamentaux conformes sont précisément les tenseurs donnés. Nous allons, dans cette Note, montrer que les deux de ces cinq équations peuvent être déduites des trois autres.

§ 1. Considérons un sous-espace V_m à m dimensions

$$x^\lambda = x^\lambda(u^i)^{(2)} \tag{1.1}$$

plongé dans un espace riemannien à n dimensions, dont le tenseur métrique est $g_{\mu\nu}$. Alors le premier tenseur fondamental g_{jk} du sous-espace est donné par

$$g_{\mu\nu} B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} = g_{jk}, \tag{1.2}$$

où $B_j^{\cdot\lambda} = \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^j}$ désignent m vecteurs, linéairement indépendents et tangents au sous-espace.

En désignant par $B_P^{\cdot\lambda}$ $n-m$ vecteurs unitaires, normaux au sous-espace et orthogonaux les uns aux autres, on a

$$g_{\mu\nu} B_j^{\cdot\mu} B_P^{\cdot\nu} = 0 \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu} B_P^{\cdot\mu} B_Q^{\cdot\nu} = \delta_{PQ}. \tag{1.3}$$

Cela étant, les équations de Gauss pour le V_m peuvent s'écrire

$$B_{j;k}^{\cdot\lambda} \equiv B_{j,k}^{\cdot\lambda} + B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} \left\{{}_{\mu\nu}^{\lambda}\right\} - B_i^{\cdot\lambda} \left\{{}_{jk}^{i}\right\} = H_{jkP} B_P^{\cdot\lambda}, \tag{1.4}$$

où le point-virgule désigne la dérivée covariante le long du souse-space et la virgule la dérivée partielle par rapport à u^k, $\left\{{}_{\mu\nu}^{\lambda}\right\}$ et $\left\{{}_{jk}^{i}\right\}$ étant les symboles de Christoffel pour V_n et V_m respectivement. Les $H_{jkP} = H_{kjP}$ apparaissant dans les equations de Gauss sont les seconds tenseurs fondamentaux du sous-espace.

D'autre part, les équations de Weingarten peuvent s'écrire

(1) K. Yano et Y. Mutô: Sur le théorème fondamental dans la géométrie conforme des sous-espaces riemanniens. Proc. Physico-Math. Soc. Japan, *24* (1942), 437–449.

(2) Les indices $\begin{cases} \lambda, \mu, \nu, \dots, \\ i, k, j, \dots, \\ P, Q, R, \dots \end{cases}$ prennent respectivement les symboles $\begin{cases} 1, 2, \dots, n, \\ \dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{m}, \\ \dot{m}+\dot{1}, \dots, \dot{n}. \end{cases}$