5. *Sur le théorème d'intégrale dû à Cauchy.*

Par Kinjiro KUNUGI.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1947.)

Il s'agit d'un théorème dû à Cauchy qui est connu aujourd'hui comme théorème fondamental de la théorie des fonctions d'une variable complexe :

Soit Γ une courbe de Jordan simple et fermée, située sur le plan des nombres complexes, dont la longueur totale est finie. Si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans l'intérieur D de Γ et continue sur le domaine fermé $D+\Gamma$, l'intégrale prise le long de cette courbe est égale à zéro :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0. \tag{1}$$

Ce théorème avait été considéré autrefois seulement pour le cas où

1) Γ est une courbe satisfaisant aux conditions supplémentaires (p. ex. telle qu'elle soit régulière, c.-à-d. une somme d'un nombre fini des courbes ayant la tangente dont la direction se varie d'une manière continue), et où

2) $f(z)$ existe et est continue sur $D+\Gamma$.

Or, la deuxième condition a été franchie par M. E. Goursat[1] en 1900, et la première par MM. S. Pollard,[2] G. A. Pfeiffer,[3] J.-L. Walsh[4] et U. Minami.[5]

Dans cette Note, nous allons donner une démonstration du théorème que nous croyons simple et nouvelle. Nous suivons la voie ouverte par MM. S. Pollard et U. Minami.

Lemme 1. *Soit Γ une courbe de Jordan, simple et fermée, située sur le plan, dont la longueur, soit désignée par L, est finie. Pour tout nombre positif δ $(\delta>0)$ arbitraire, il existe un polygone π, situé dans l'intérieur D de Γ, dont la longueur totale est inférieure à $6L$, et qui satisfait à la condition suivante : Γ et π se décomposent en un même nombre n $(n>3)$ des arcs $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ et $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ rangés dans le même ordre dans Γ et dans π, de sorte que*

1) *pour tous les deux points a, b de $\Gamma_i+\pi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, on a $\rho(a, b)<\delta$, $\rho(a, b)$ étant la distance entre les points a, b, et que*

1) E. Goursat: Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy. Transactions of the Amer. Math. Soc. Vol. 1 (1900), pp. 14-16.

2) S. Pollard: On the conditions for Cauchy's theorem. Proceedings of the London Math. Soc. Second series Vol. 21 (1923), pp. 456-482.

3) G. A. Pfeiffer: A proof of Cauchy's integral theorem for any rectifiable boundary. Bull. of the Amer. Math. Soc. Vol. XXX (1924), p. 213. Cf. aussi E. Kamke: Zu dem Integralsatz von Cauchy. Math. Z. Bd. 35 (1932) p. 539.

4) J.-L. Walsh: On approximation to an arbitrary function of a complex variable by polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 30 (1928), p. 472. Approximation by polynomials in the complex domain (Memorial des Sciences Math. Fascicule LXXII), Paris, 1935.

5) U. Minami: On the Cauchy's integral theorem. Proc. of the Imp. Acad. of Japan, Vol. XVIII (1942), pp. 440-445.