18. *Sur la structure des espaces de Riemann dont le groupe d'holonomie fixe un plan à un nombre quelconque de dimensions.*

Par Kentaro YANO
Mathematical Institute, Tokyo University, Tokyo
et Shigeo SASAKI
Mathematical Institute, Tôhoku University, Sendai.
(Comm. by T. KUBOTA, M. J. A., July 12, 1948.)

§ 1. *Le cas où le groupe d'holonomie fixe une direction ou un point.*

Nous allons tout d'abord rappeler rapidement les résultats déjà obtenus sur la structure des espaces de Riemann dont le groupe d'holonomie fixe une direction ou un point.

A chaque point $\boldsymbol{M}$ d'un espace de Riemann dont la forme fondamentale est

(1. 1) $$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots=1, 2, \ldots, n)$$

attachons un repère mobile formé par n vecteurs $\boldsymbol{e}_\lambda$ unitaires et orthogonaux l'un à l'autre. Alors la connexion euclidiene sans torsion de l'espace de Riemann s'exprime par

(1. 2) $$\begin{cases} d\mathbf{M}=\omega^\lambda \mathbf{e}_\lambda, \\ d\mathbf{e}_\mu=\omega_\mu^\lambda \mathbf{e}_\lambda, \end{cases}$$

où

(1. 3) $$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\ldots+(\omega^n)^2$$

et

(1. 4) $$\omega_\mu^\lambda+\omega_\lambda^\mu=0$$

Si le groupe d'holonomie de l'espace fixe une direction, on prend le premier vecteur unitair $\mathbf{e}_1$ dans cette direction. Alors, on doit avoir $d\mathbf{e}_1=0$, et par conséquent

(1. 5) $$\omega_1^i=-\omega_i^1=0 \quad (i=2, 3, \ldots, n)$$

Donc, les équations de structure

(1. 6) $$(\omega^\lambda)'=[\omega^\alpha\omega_\alpha^\lambda]$$

nous donnent

(1. 7) $$(\omega^1)'=[\omega^\alpha\omega_\alpha^1]=\omega^i\omega_i^1]=0$$

et par conséquent, l'équation

(1. 8) $$\omega^1=0$$

est complètement intégrable. Donc, il existe une famille des ∞^1 hypersurfaces dont les normales $\boldsymbol{e}_1$ sont toujours parallèles, c'est-à-dire, une famille des ∞^1 hypersurfaces totalement géodésiques dont les trajectoires orthogonales sont géodésiques. Inversement, s'il existe, dans l'espace, une telle famille des hypersurfaces, il est

1) S. Sasaki: Sur la structure des espaces de Riemann dont le groupe d'holonomie fixe une direction ou un point (en japanais). Nippon-Sugaku-Butsuri-Gakkai-Kaishi, **16** (1942), 193—200.