16. *Einige Ungleichheiten für die Eilinien und Eiflächen.*

Von Tadahiko KUBOTA, M. J. A.

(Comm. July 12, 1948.)

1 *Bezeichnet man den Flächeninhalt, den Umfang, den Durchmesser irgendeiner Eilinie $\mathfrak{E}$ b. z. w. mit F, L, D und den gemischten Inhalt von der Eilinie $\mathfrak{E}$ sowie von der Eilinie, welche durch Drehung um den Winkel 180° aus $\mathfrak{E}$ erhalten wird, mit M, so besteht die Ungleichheit*

$$\mathrm{DL} \geqq 2\,(\mathrm{F}+\mathrm{M}) \qquad (1)$$

wobei die Gleichheit nur für die Eiflächen konstanter Breite gilt.

Wenn man die Stützgeradenfunktion der Eilinie $\mathfrak{E}$ durch $p\,(\varphi)$ darstellt, dann ist

$$\mathrm{D} = \mathrm{Max}\,[p\,(\varphi) + p\,(\varphi+\pi)]$$

Der gemischte Inhalt der Eilinie $\mathfrak{E}$ und der Eilinie mit der Stützgerandenfunktion $\frac{1}{2}[p(\varphi)+p(\varphi+\pi)]$ ist

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{p(\varphi)\,\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}-p'(\varphi)\,\frac{p'(\varphi)+p'(\varphi+\pi)}{2}\right\}d\varphi$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\{p^2(\varphi)-p'(\varphi)^2\}\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\{p(\varphi)p(\varphi+\pi)$$
$$-p'(\varphi)p'(\varphi+\pi)\}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{F}+\frac{1}{2}\mathrm{M}$$

Anderseits gilt

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left\{p(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}-p'(\varphi)\,\frac{p'(\varphi)+p'(\varphi+\pi)}{2}\right\}d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\,d\varphi-\left[\frac{1}{2}\,p'(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p''(\varphi)\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\,d\varphi$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{p(\varphi)+p''(\varphi)\}\,\frac{p(\varphi)+p(\varphi+\pi)}{2}\,d\varphi$$
$$\leqq\frac{\mathrm{D}}{4}\int_0^{2\pi}[p(\varphi)+p''(\varphi)]\,d\varphi=\frac{1}{4}\mathrm{DL}$$

Folglich
$$\frac{1}{4}\mathrm{DL}\geqq\frac{1}{2}(\mathrm{F}+\mathrm{M}) \text{ d. h.}$$
$$\frac{\mathrm{DL}}{2}\geqq\mathrm{F}+\mathrm{M},$$

womit der Satz bewiesen ist. Hierbei gilt die Gleichheit nur für den Kurven konstanter Breite.

Nach dem Brunn-Minkowshischen Satz für zwei Eilinien $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, haben wir