29. *Sur les propriétés de la famille des courbes intégrales d'un système différentiel ordinaire.*

Par Masuo HUKUHARA.

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 12, 1949.)

1. Nous considérons le système différentiel ordinaire

$$(1) \qquad y_j'=f_j(x,y_1,\cdots\cdots,y_n) \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n),$$

dont les seconds membres sont continus et bornés dans le domaine

$$(2) \qquad a\leqq x\leqq a', \quad |y_1|<\infty,\cdots\cdots, \quad |y_n|<\infty.$$

Soit A un ensemble contenu dans (2). Nous désignerons par $R(A)$ la région remplie par les courbes intégrales passant par un point de A, et par $S(\xi\ ;\ A)$ la section de $R(A)$ par l'hyperplan $x=\xi$.

On sait que la famille des courbes intégrales jouit des propriétés suivantes.

A. *$R(A)$ est borné si A est borné.*

B. *$R(A)$ est fermé si A est fermé.*

C. *$S(\xi\ ;\ A)$ est un continu si A est un continu.*

D. *Si A est un ensemble fermé dans un hyperplan $x=\xi$ et si Q est un point frontière de $R(A)$, il existe une courbe intégrale passant par Q et un point P de A et dont l'arc PQ se trouve sur la frontière de $R(A)$.*

On peut généraliser la proposition C de la manière suivante.

C'. *$S(\xi\ A)$ est connexe si A est connexe.*

Supposons en effet, que $S(\xi\ ;A)$ soit la somme de deux ensembles sans point commun S_1 et S_2. Si $A_1=AR(S_1)$ et $A_2=AR(S_2)$ ont un point commun P, on aura

$$S_1S\ (\xi\ ;\ P)\neq 0, \quad S_2S(\xi\ ;\ P)\neq 0.$$

Or, $S(\xi\ ;\ P)$ étant un continu d'après C, on a

$$S_1S_2'+S_1'S_2\neq 0.$$

Si A_1 et A_2 n'ont pas de point commun on a

$$A_1A_2'+A_1'A_2\neq 0,$$

car A est connexe. Si par exemple, $A_1A_2'\neq 0$, on aura $S_1S_2'\neq 0$. Donc $S\ (\xi\ ;\ A)$ est connexe.

2 Nous appellerons la distance de deux courbes intégrales C_1 et C_2 la borne supérieure de la distance des points de C_1 et de C_2 ayant les mêmes abscisses et la désignerons par $\rho\ (C_1, C_2)$. Alors la proposition suivante est évidente.