

### 37. Sur une séparation des ensembles analytiques plans par une courbe mesurable ( $B$ ).

Par Hideaki WATANABE.

Institut Mathématique, Université de Tôhoku, Sendai.

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1950.)

N. Lusin a établi le théorème suivant qui est fondamental dans la théorie des ensembles analytiques.<sup>1)</sup>

**Théorème de N. Lusin.** *Si  $E$  est un ensemble analytique dans le plan  $OXY$  et uniforme par rapport à l'axe  $OX$ , il existe une courbe mesurable ( $B$ ) telle que l'ensemble  $E$  est situé sur cette courbe.*<sup>2)</sup>

Sa démonstration se base à l'effet: deux ensembles analytiques disjoints sont toujours séparables ( $B$ )—ce qui est encore un théorème fondamental dans cette théorie.

L'objet de cette note est d'étudier une séparation de deux ensembles analytiques plans dont l'un est situé au-dessous de l'autre par une courbe mesurable ( $B$ ), et de prouver, comme son application, le théorème précédent.

1. **Notations et définitions.**<sup>3)</sup> Soit  $E$  un ensemble situé dans le plan  $OXY$ . Désignons par  $\uparrow E$  l'ensemble des points situés sur les droites parallèles à l'axe  $OY$  qui sont menées par tous les points de  $E$ . Soit  $P_x$  la droite parallèle à l'axe  $OY$  qui est menée par le point  $(x, 0)$ , et considérons le point  $\zeta_x$  dont l'abscisse est  $x$  et dont l'ordonnée est la borne supérieure des ordonnées des points de  $P_x E$ , si  $P_x E \neq \emptyset$ .<sup>4)</sup> Désignons par  $\zeta E$  l'ensemble des points  $\zeta_x$ . Il est très aisé de voir que l'ensemble  $\zeta E$  est uniforme par rapport à l'axe  $OX$ . Le point  $\zeta'_x$  sera défini en remplaçant dans la définition de  $\zeta_x$  le mot "supérieure" par "inférieure", et désignons par  $\zeta' E$  l'ensemble des points  $\zeta'_x$ . Soit  $\delta E$  [ $\delta' E$ ] la somme de  $\zeta E$  [ $\zeta' E$ ] et l'ensemble des points situés au-dessus [au-dessous] de  $\zeta E$  [ $\zeta' E$ ].

Désignons enfin par  $(a < y < b)$  la partie du plan  $OXY$  dont le point a une ordonnée  $> a$  et  $< b$ . La partie  $(a \leq y \leq b)$  sera définie d'une façon analogue, et  $(y = a)$  est la droite parallèle à l'axe  $OX$  menée par le point  $(0, a)$ .

1) Cf., N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques etc., (1930) p. 234.

2) Un ensemble plan  $E$  est dit *uniforme* [*semi-uniforme*] par rapport à l'axe  $OX$ , si toute droite parallèle à l'axe  $OY$  coupe  $E$  en un point [en un nombre dénombrable de points] au plus. Un ensemble plan est appelé courbe, s'il est uniforme par rapport à l'axe  $OX$  et sa projection sur cette axe est lui identique.

3) Cf., H. Watanabe: Sur un problème de N. Lusin concernant la séparabilité des ensembles plans (paraître dans Tôhoku Math. Journ.).

4) Evidemment  $\zeta_x \in E$  ou non.