62. *Détermination unique de solution de l'équation intégrale de Volterra*

Par Tokui SATŌ.

(Comm. by K. KUNUGI M.J.A., June 12, 1951.)

Dans la théorie analytique de l'équation différentielle, le théorème[1] de la détermination unique de solution (le théorème de M. Picard) est fondamentalement important. On peut le généraliser dans le cas de l'équation intégrale de Volterra.

Soient D et $\mathfrak{D}$ des domaines respectivement dans le plan x et dans le (t, u)-espace.

Soit C une courbe joignant deux points a et x_0 dans D $(a, x_0 \in D)$ qui satisfait à la condition suivante: quelque petit que soit r, il existe sur C un point x_1 tel que, à partir de x_1, la courbe C ne sorte plus du cercle de x_0 et de rayon r.

Pour simplifier l'écriture, désignons par C la courbe excepté x_0, par $\bar{C}$ la courbe comprise x_0 et par $\widehat{ax_1}$ l'arc de C de a à x_1.

Théorème. *Soient $f(x)$ et $K(x, t, u)$ régulières analytiquement respectivement dans D et dans $|x-a| < l$, $(t, u) \in \mathfrak{D}$, où l est la borne supérieure de $|t-a|$ pour $(t, u) \in \mathfrak{D}$.*

Si l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t))dt \qquad (x, t \in C) \tag{1}$$

admet une solution régulière $u = u(x)$ sur C, et le point (x_0, u_0) appartient à $\mathfrak{D}$, où u_0 est une valeur de l'ensemble des valeurs limites de $u = u(x)$ pour $x \to x_0$, $x \in C$, $u = u(x)$ est régulière au point x_0.

Par hypothèse on peut prendre r, ρ de manière que $|x-x_0| \leqq r$ et $|t-x_0| \leqq r$, $|u-u_0| \leqq \rho$ soient contenus respectivement dans D et dans $\mathfrak{D}$. Par conséquent on a une constante positive M telle que

$$\begin{aligned}
&|K(x, t, u(t))| \leqq M && x \in \bar{C}, \quad t \in \widehat{ax_1}, \\
&|K(x, t, u)| \leqq M && x \in \bar{C}, \quad |t-x_0| \leqq r, \quad |u-u_0| \leqq \rho, \\
&|K(x, t, u)| \leqq M && |x-x_0| \leqq r, \quad |t-x_0| \leqq r, \quad |u-u_0| \leqq \rho.
\end{aligned}$$

Par hypothèse on peut prendre une suite de points x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ tels que $|x_\nu - x_0| \downarrow 0$, $|u(x_\nu) - u_0| \to 0$. Sans perdre la généralité on peut supposer que $|x_\nu - x_0| < r$, $|u(x_\nu) - u_0| < \rho$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Désignons par C_ν la courbe qui consiste de l'arc $\widehat{ax_\nu}$ de la courbe C et du segment $\overline{x_\nu x_0}$.

1) E. Picard, Traité d'analyse (deuxième édit.) II, 355.