

134. Über die imaginär-quadratischen Zahlkörper der Klassenzahl Eins oder Zwei.

Von Kaneshiro ISEKI.

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Dec. 12, 1951.)

Es wurde von Herren Heilbronn und Linfoot 1934 bewiesen¹⁾, dass es höchstens eine Fundamentaldiskriminante $< -10^4$ mit der Klassenzahl Eins gibt. Ich habe mich darum bemüht, das entsprechende Problem für den Fall der Klassenzahl ≤ 2 zu lösen, und das folgende Resultat gewonnen:

Es gibt höchstens eine einzige Fundamentaldiskriminante $< -9 \times 10^4$ mit der Klassenzahl ≤ 2 .

Meine Methode gestattet, für jede vorgegebene natürliche Zahl n eine positive Zahl $N(n)$ effektiv so auszuberechnen, dass es höchstens eine Fundamentaldiskriminante $< -N(n)$ mit der Klassenzahl $\leq n$ gibt; jedoch liegt mein Hauptinteresse im nächst einfachsten Fall $n = 2$.

Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, dass Herr Tatzawa³⁾ ein wenig später als die gegenwärtige Untersuchung einige engst mit dem hierigen verbundene Resultate nach seiner eigenen Methode erhielt und vor allem bewies, dass man $N(n) = 2100 n^2 \log^2(13n)$ nehmen darf.

Im folgenden werde ich den Abriss³⁾ meiner Beweismethode angeben. Es seien $-D$ und $-D_0$ zwei Fundamentaldiskriminanten mit der Nebenbedingung $D > D_0 > 9 \times 10^4$. Wir bezeichnen mit $h = h(-D)$ und $h_0 = h(-D_0)$ die entsprechenden Klassenzahlen. Nun nehmen wir $h \leq 2$ und $h_0 \leq 2$ an, und daraus soll ein Widerspruch abgeleitet werden. Das wird sich aus den folgenden zwei Lemmata ergeben:

Lemma 1: *Es sei $\chi_0(n) = \left(\frac{-D_0}{n}\right)$ das Kroneckersche Symbol. Dann ist für die entsprechende Dirichletsche L-Funktion*

$$L\left(1 - \frac{5}{\sqrt{D_0}}, \chi_0\right) < 0 < L\left(1 - \frac{h_0}{\sqrt{D_0}}, \chi_0\right).$$

1) H. Heilbronn und E. H. Linfoot: On the imaginary quadratic corpora of class-number one; Quart. Journ. Math. (Oxford Series), Bd. V (1934), 293-301.

2) On a theorem of Siegel, was im „Japanese Journal of Mathematics“ zu erscheinen ist.

3) Der ausführliche Beweis wird demnächst im „Japanese Journal of Mathematics“ (Jahrgang 1952) erscheinen.