57. *Ein Satz über die Abelschen Gruppen mit Operatoren.*

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Universität zu Osaka.
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 13, 1952.)

Es sei Ω eine Erweiterung einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$ mit einem Operatorring Γ. Γ besitze das Einselement 1, das den identischen Automorphismus von $\mathfrak{A}$ bewirkt. Ein Element α aus Ω heisst *algebraisch*[1] über $\mathfrak{A}$, wenn die durch $\mathfrak{A}$ und α erzeugte Gruppe $\mathfrak{A}(\alpha)$ keine Untergruppe $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$ besitzt. Die Gesamtheit von m aus Γ mit $m\alpha\in\mathfrak{A}$ bildet ein Linksideal $\mathfrak{m}$ von Γ, die Ordnung von α bezüglich $\mathfrak{A}$. Die Gleichung $m\alpha=a\in\mathfrak{A}$ bedeutet einen Operatorhomomorphismus von $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{A}$, der mit $\theta(\mathfrak{m})$ bezeichnet wird.

Hilfssatz 1. Ein Element α aus Ω ist dann und nur dann algebraisch über A, wenn man den zugehörigen Homomorphismus $\theta(\mathfrak{m})$ nicht erweitern kann.

Ist nämlich $\theta(\mathfrak{n})$ eine Erweiterung von $\theta(\mathfrak{m})$, der $n\in\mathfrak{n}$ auf $a\in\mathfrak{A}$ abbildet, so bilden die Elemente $n\alpha-a$ eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}(\alpha)$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$. Umgekehrt sei $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}(\alpha)$ mit $\mathfrak{A}\frown\mathfrak{B}=0$. Dann besteht $\mathfrak{B}$ aus den Elementen $n\alpha-a$ und die Abbildung $n\rightarrow a$ ist eine Erweiterung von $\theta(\mathfrak{m})$.

Eine Erweiterung Ω heisst algebraisch über $\mathfrak{A}$, wenn jedes Element aus Ω algebraisch über A ist. Dann beweist man leicht.

Hilfssatz 2. Sind $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{A}''$, so ist $\mathfrak{A}''$ algebraisch über $\mathfrak{A}'$.

Zwei Erweiterungen heissen *äquivalent* über $\mathfrak{A}$, wenn sie durch die $\mathfrak{A}$ elementweise festlassenden Isomorphismen aufeinander abgebildet werden.

Satz. *Jede algebraische Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist mit keiner echten Untergruppe äquivalent, wenn man voraussetzt*[2]*: 1) Teilerkettensatz für Linksideale in Γ, 2) Jeder Operatorhomomorphismus $\bar{\sigma}$ eines Linksideals $\bar{\mathfrak{m}}$ in einem Restklassenmodul $\bar{\Gamma}=\Gamma/\mathfrak{l}$ nach einem Linksideal $\mathfrak{l}$ wird durch die Abbildung σ von m induziert, die m aus $\mathfrak{m}$ in mt_σ überführt. Dabei bedeutet t_σ ein Element aus Γ.*

---

1) Diese Definition des algebraischen Elementes und die nachfolgende zwei Hilfssätze entnehmen wir aus der Arbeit: K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen, erscheint demnächst in Osaka Math. Journal Bd. 4.

2) Gilt der Vielfachenkettensatz für Rechts- und Linksideale, so ist die Bedingung 2) für $\mathfrak{l}=0$ bzw. für zweiseitigen $\mathfrak{l}$ damit äquivalent, dass Γ ein quasi-Frobeniusscher bzw. einreihiger Ring ist. Vgl. M. Ikeda, A characterization of quasi-Frobenius rings, erscheint demnächst in Osaka Math. Journal Bd. 4.