77. *Eine gemischte Randwertaufgabe für einen Kreis.*

Von Yûsaku KOMATU.
Mathematisches Seminar, Institut für Technologie zu Tokyo.
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., July 12, 1952.)

1. Die Randwertaufgabe von harmonischen Funktionen hat zwar in bezug auf das Dirichletsche sowie Neumannsche Problem besonders eingehend erforscht. Aber die Untersuchungen der übrigen, d. h. der gemischten Probleme werden noch nicht für genug angesehen.

In der vorliegenden Note sollen wir uns mit dem einfachsten Fall der letzten Probleme beschäftigen, nämlich mit dem zweidimensionalen Fall, wo das Grundgebiet der Einheitskreis ist, dessen ein Peripheriebogen die Randwerte der gesuchten Funktion selbst trägt und der übrige Bogen diejenigen ihrer Normalableitung trägt. Wir sollen eine explizite Integraldarstellung für die Lösung dieser Randwertaufgabe herleiten, welche der Poissonschen Darstellung entspricht, und dann einige von ihren Eigenschaften erwähnen. Aber hier wollen wir uns nur auf eine Skizze beschränken. Ausführliche Beweisführung wird andernorts erscheinen.

2. Wir betrachten zuerst vorbereitend eine Funktion, welche das Einheitskreisinnere in der ζ-Ebene eineindeutig und konform auf ein Gebiet in der W-Ebene, das dadurch entsteht, daß man das Einheitskreisäußere längs eines von einem Punkt der Peripherie orthogonal ausgehenden Segments aufschlitzt.

Gegeben seien ein innerer Punkt z und zwei Randpunkte e^{ia}, e^{ib} mit $a<b<a+2\pi$ des ζ-Einheitskreises, und die Abbildung sei so normiert, daß der Bogen $b<\arg\zeta<a+2\pi$ in den Schitz übergeht, und daß der Punkt z in den unendlichfernen Punkt übergeht und sogar als ein Pol mit einem positiven Residuum auftritt. Die diese Abbildung vermittelnde Funktion $W=W(\zeta)\equiv W(\zeta;\, z, a, b)$ ist dann durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt und in einer expliziten Weise mittelst einer elementaren Funktion durch die Gleichung

$$\frac{\Gamma W}{(1+\Gamma W)^2}=H\frac{\bar{\Gamma}(\zeta-z)/(1-\bar{z}\zeta)}{(1+\bar{\Gamma}(\zeta-z)/(1-\bar{z}\zeta))^2}$$

geliefert, worin gesetzt sind

$$\Gamma=\sqrt{l(e^{ia};z)\,l(e^{ib};z)},$$

$$e^{iK}=\sqrt{l(e^{ia};z)/l(e^{ib};z)}, \qquad H=\cos^2\frac{K}{2}$$