91. *Zum Verengungsideal des Primideals**)

Von Takasaburo UKEGAWA

(Comm. by Kenjiro SHODA, M. J. A., April 13, 1970)

In den kommutativen Ringen sind die Verengungsideale der Primideale wieder Primideale, wobei das Verengungsideal den Durchschnitt des Ideals mit einem Unterring bedeutet, aber in den Schiefringen geht diese Eigenschaft verloren. Vor kurzem hat N. H. McCoy bewiesen [2], dass das Verengungsideal eines Primideals wieder ein Primideal ist, wenn der Unterring ein Ideal ist. Dieser Satz wurde auch in [3] und [4] erwähnt. In der vorliegenden Note betrachten wir den Unterring, der nicht immer ein Ideal ist und ausserdem die obenerwähnte Eigenschaft besitzt.

Definition. Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring, $\mathfrak{o}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}^*$ (wir nehmen die Existenz des Einselementes nicht an). Ein in $\mathfrak{o}$ enthaltenes grösstes zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}^*$ heisst der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ [1]. Wenn Verengungsideale jeder Primideale von $\mathfrak{o}^*$ wieder Primideale von $\mathfrak{o}$ sind, so heissen wir "$\mathfrak{o}$ besitzt die Eigenschaft ※ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$".

In dieser Note bezeichnen wir mit $M\supset N$, dass N eine Untermenge von M ist, und mit $M>N$, dass N eine echte Untermenge von M ist.

Hilfssatz. *Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring, $\mathfrak{o}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}^*$, und $\mathfrak{f}$ der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$ mit $(\mathfrak{P},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$, so ist $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$.*

Beweis. $\mathfrak{m}$ sei ein Untermodul von $\mathfrak{o}^*$, dann bezeichnen wir das von $\mathfrak{m}$ erzeugte zweiseitige Ideal aus $\mathfrak{o}^*$ mit $\tilde{\mathfrak{m}}$, d.h. $\tilde{\mathfrak{m}}=(\mathfrak{m},\mathfrak{o}^*\mathfrak{m},\mathfrak{m}\mathfrak{o}^*,\mathfrak{o}^*\mathfrak{m}\mathfrak{o}^*)$. Es seien $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ beliebige zweiseitige Ideale aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{ab}\equiv 0(\mathfrak{p})$, wo $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ist. Es ist $\mathfrak{P}\supset\tilde{\mathfrak{p}}\supset\widetilde{\mathfrak{ab}}\supset\widetilde{\mathfrak{afb}}$, und da $\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}=\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}$ ist, so folgt $\widetilde{\mathfrak{afb}}\supset\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}$, also $\mathfrak{P}\supset\tilde{\mathfrak{a}}\mathfrak{f}\tilde{\mathfrak{b}}$. Anderseits $(\mathfrak{P},\mathfrak{f})=\mathfrak{o}^*$, also $\tilde{\mathfrak{a}}\equiv 0(\mathfrak{P})$ order $\tilde{\mathfrak{b}}\equiv 0(\mathfrak{P})$; also $\mathfrak{a}\subset\tilde{\mathfrak{a}}\cap\mathfrak{o}\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$, oder $\mathfrak{b}\subset\tilde{\mathfrak{b}}\cap\mathfrak{o}\subset\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$, demnach $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}$.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{o}^*$ ein Schiefring, dessen Primideal teilerlos ist, und $\mathfrak{f}$ sei ein beliebiges zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}^*$. Ist $\mathfrak{o}_0$ ein Unterring von $\mathfrak{o}^*$, der hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ die Eigenschaft ※ besitzt, so genügt auch $\mathfrak{o}=(\mathfrak{f},\mathfrak{o}_0)$ die Eigenschft ※ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{f}'$ sei der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$, dann ist $\mathfrak{f}'\supset\mathfrak{f}$. Ist $(\mathfrak{P},\mathfrak{f}')=\mathfrak{o}^*$, so ist $\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}$ nach Hilfssatz ein Primideal von $\mathfrak{o}$. Wir nehmen jetzt an, es sei $(\mathfrak{P},\mathfrak{f}')\neq\mathfrak{o}^*$,

*) Herrn Professor Keizo Asano zum 60. Geburtstag.