193. *Problème de Dirichlet pour des opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre*

Par Norio SHIMAKURA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., June 12, 1971)

§ 1. Introduction

Nous avons étudié dans [6] et [7] de certains opérateurs elliptiques d'ordre supérieur dégénérés sur la frontière. La dégénéressance avait lieu en toutes directions par un ordre polynomial de la distance jusqu'au bord. Et les conditions aux limites posées avaient en général un caractère non local. Nous avons obtenu les estimations a priori, la régularité des solutions et la finitude de l'indice pour ces problèmes aux limites généraux. Mais nous n'avons donné pratiquement aucun exemple d'opérateurs pour lesquels l'existence et l'unicité des solutions s'obtiennent.

Dans le présent mémoire, nous étudions le problème de Dirichlet non homogène pour des opérateurs du second ordre à coefficients réels sur le bord. Nous précisons la classe d'opérateurs traités au début du § 2 (voir les formules (2.1), $\cdots$, (2.5)). Nous partons des estimations a priori pour le problème de Dirichlet et pour le problème formellement adjoint (sans aucune condition aux limites), les hypothèses posées sur les coefficients sont pour que les opérateurs deviennent essentiellement acrétifs (voir le Lemme 2), et finalement, nous obtenons le Théorème d'existence et d'unicité des solutions pour des opérateurs à un paramètre positif suffisamment grand.

Le principle de raisonnement est celui de M. Schechter [5]. La seule différence est la discussion de la régularité des solutions faibles développée dans le § 4.

Un résultat analogue sur le problème de Dirichlet est dans la collaboration de MM. Bolley et Camus [2] dont le détail n'est pas encore publié (voir aussi [1]).

§ 2. Hypothèses et théorème

Soit Ω un ouvert borné de $\boldsymbol{R}^n$ à frontière S hypersurface de classe C^∞, supposons que Ω soit situé localement à un seul côté de S. Nous considérons un opérateur différentiel Ω:

$$Lu(x) \equiv -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\varphi(x)u(x)) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + a_0(x)u(x). \tag{2.1}$$

D'abord, le poids $\varphi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ satisfait à la condition

$$\varphi(x) > 0, \text{ dans } \Omega\,;\ \varphi(x) = \text{la distance de } x \text{ jusqu'à } S, \text{ dans } U, \tag{2.2}$$