38. *Notes sur l'Intégration. I*

— *Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle*

Par Shizu ENOMOTO
Institut de Mathématiques, Université d'Ôsaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1954)

Le but principal de ces Notes est l'extension de l'intégration au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) pour l'espace euclidien d'une dimension à l'espace euclidien de plusieurs dimensions. Les études dans cette direction ont été déjà données par MM. M. Krzyański,[1] J. Ridder,[2] S. Kempisty[3] et M. Romanowski.[4] Comme totalisation d'une fonction de point définie dans l'intervalle contenu dans l'espace euclidien de n dimensions, ces auteurs ont fait appel à la notion d'une fonction d'intervalle. Nous allons aussi employer cette notion, mais, en outre, les valeurs des fonctions d'intervalle dans nos cas peuvent être approchées par celles des intégrales au sens de Lebesgue. D'abord, dans cette Note, nous commençons par l'étude préliminaire sur les propriétés des fonctions d'intervalle.

Termes et Notations. Considérons un espace euclidien E_n à n dimensions composé des points $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Etant donné un système $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n$ de $2n$ nombres réels tels que $a_i<b_i$ pour $i=1, 2, \dots, n$, nous appellerons intervalle $I=[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]$ de l'espace E_n l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $a_i \leq x_i \leq b_i$ pour $i=1, 2, \dots, n$ et carré l'intervalle tel que $b_1-a_1=b_2-a_2=\dots=b_n-a_n$. Nous appellerons le plus grand des nombres $b_1-a_1, b_2-a_2, \dots, b_n-a_n$ la norme, $n(I)$, de l'intervalle I, et le produit $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n)$ l'aire, $|I|$, de l'intervalle I. Nous entendrons par $p(I)$ le paramètre de régularité de I, c'est-à-dire le rapport des mesures de l'intervalle I et du plus petit carré contenant I.

Nous entendrons par système élémentaire un nombre fini S d'intervalles $I_1, I_2, \dots, I_m$ contenus dans E_n.

Soit $F(I)$ une fonction d'intervalle définie pour tous les intervalles I contenus dans un intervalle R de E_n. Nous disons que $F(I)$ est fini-additive, lorsque

$$F(I)=F(I_1)+F(I_2)$$

quelle que soit la décomposition de I en deux intervalles I_1 et I_2.

Nous disons qu'une fonction d'intervalle $F(I)$ définie dans R est continue (α) à un point p de R quand elle tend vers zéro avec l'aire d'intervalle I tel que $n(I)\leq\alpha$ et $I \ni p$. Pour tout ensemble A contenu