# 61. Notes sur l'Intégration. II
## — Une Propriété du Recouvrement Fermé de l'Intervalle

Par Shizu ENOMOTO
Institut de Mathématiques, Université d'Ôsaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 12, 1954)

Dans cette Note, nous allons étudier une propriété d'une suite des ensembles fermés, où la somme couvre un intervalle contenu dans un espace euclidien d'une ou plusieurs dimensions. La propriété est importante pour voir une structure d'une fonction d'intervalle qui est l'intégrale au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) dans l'espace euclidien d'une dimension. En outre, elle jouera un rôle capital dans la théorie de l'intégrale, extension de cette intégrale aux espaces de plusieurs dimensions, que nous donnerons dans la Note prochaine.

Dans cette Note, nous gardons, sauf indication contraire, la terminologie et les notations de la Note I.[*]

Soit $J_0$ un intervalle contenu dans l'espace euclidien $E_1$ d'une dimension. Soit $M_m(m=1,2,\ldots)$ une suite des ensembles fermés telle que $\sum_{m=1}^{\infty} M_m=J_0$ et $M_m \supseteq M_{m'}$ pour $m$, $m'$ tels que $m>m'$. Alors nous avons le théorème suivant:

*Théorème* 1. Pour $M_m(m=1,2,\ldots)$ et pour une suite des nombres positifs $\varepsilon_m(m=1,2,\ldots)$, tout intervalle J contenu dans $J_0$ possède la propriété suivante qu'on désignera par $(A_1)$: il existe une suite des ensembles fermés $F_{n_i m_i}(J)$ $(i=1,2,\ldots)$, de total J, possédant les propriétés telles que;

1) $n_i<m_i<n_{i+1}$ pour $i=1,2,\ldots,$
2) $F_{n_i m_i}(J) \subseteq M_{m_i}$ pour $i=1,2,\ldots,$
3) $F_{n_i m_i}(J) \supseteq F_{n_{i'} m_{i'}}(J)$ pour $i$, $i'$ tels que $i>i'$,
4) si $F_{n_i m_i}(J)$ n'est pas identique à J, il possède la propriété $(B_1)$ pour $M_m\,(m=1,2,\ldots)$ et $\varepsilon_m\,(m=1,2,\ldots)$, c'est-à-dire la suite des intervalles $J'_j\,(j=1,2,\ldots)$ contigus à l'ensemble formé des points de $F_{n_i m_i}(J)$ et d'extrémités de J se peut classifier en un nombre $m_i-n_i+1$ des suites des intervalles $J_{kj}\,(j=1,2,\ldots)$, où $n_i \leqq k \leqq m_i$ et $J_{kj}$, pouvant être vide, satisfont aux conditions suivantes pour tout indice $k$;

4.1) $\sum_{j=1}^{\infty} |J_{kj}|<\varepsilon_k,$

---

*) Shizu Enomoto: Notes sur l'Intégration. I — Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle, Proc. Japan Acad., **30**, 176 (1954).