72. *Sur le Type d'Ordination de Famille Monotone d'Ensembles*

Par Tosiyuki TUGUÉ et Zen-iti OKUYAMA
Université Métropolitaine, Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 13, 1954)

1. Le but de cette note est de donner les conditions pour que diverses familles d'ensembles et monotones présentent les types d'ordinations linéaires. Nous dirons avec M. A. Denjoy[1] qu'un ensemble ordonné E présente un type d'ordination linéaire si E est semblable à un ensemble linéaire, et qu'un ensemble ordonné E présente un type d'ordination planaire si E est semblable à un ensemble de points situés sur un plan et ordonnés alphabétiquement. Considérons une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles conténus dans l'espace euclidien U_r à r dimensions et tels que, de deux quelconques d'entre eux, l'un contient l'autre, et ordonnons entre eux dans le sens de la décroissance — c'est-à-dire de façon que l'ordination $E_1 \prec E_2$ soit simultanée à la relation l'inclusion $E_1 \supset E_2$.[2] Nous l'appelons une famille monotone.

Si la famille donnée $\mathfrak{F}$ consiste d'ensembles fermés et est monotone, on sait que cela présente un type d'ordination linéaire.[3] Voici une démonstration très briève. Soit:

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \tag{1}$$

une base ouverte, énumérée et bien déterminée de l'espace U_r. Maintenant, définissons les applications $f^{(n)}(E)$ pour tout ensemble de $\mathfrak{F}$ de manière que

$$f^{(n)}(E)=\begin{cases} 0, & \text{lorsque} \quad E \cap u_n \neq 0, \\ 1, & \text{lorsque} \quad E \cap u_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

et posons

$$f(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(E)}{2^n}. \tag{3}$$

Prenons deux ensembles E_1, E_2 appartenants à $\mathfrak{F}$. Si l'on a $E_1 \neq E_2$, l'un contient l'autre proprement, soit p. e. $E_1 \supset E_2$; on peut alors trouver un point p tel qu'on ait $p \in E_1$ et $p \bar{\in} E_2$. E_2 étant fermé, il existe un ensemble ouvert u_n de la base (1) qui contient p, mais auquel E_2 est disjoint. D'après la définition (2), il est $f^{(n)}(E_1)=0$,

---

1) A. Denjoy: *L'énumération transfinie*, Livre I (1946).

2) Nous écrivons $E_1 \supset E_2$, lorsque $E_1 \supseteqq E_2$ et $E_1 \neq E_2$.

3) A. Denjoy: Loc. cit., et C. Kuratowski: *Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes*. Fund. Math., **30** (1938).