94. *Notes sur l'Intégration. III*
—Théorème de Fubini

Par Shizu ENOMOTO
Institut de Mathématiques, Université d'Ôsaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., June 12, 1954)

Dans cette Note, nous allons donner une extension de l'intégration au sens de Denjoy (ou Denjoy-Perron) pour l'espace euclidien E_2 de 2-dimensions. L'intégrale qui sera donnée dans la suite pour l'espace E_2 aura trois principales propriétés suivantes:

a) Soient $f(x, y)$ une fonction de point qui est intégrable sur un intervalle R contenu dans l'espace E_2, et F(I) l'intégrale de notre sens de $f(x, y)$ sur un intervalle I contenu dans R. Alors, $F'(x, y)$[1] existe presque partout aux points (x, y) de R et elle est égale à $f(x, y)$.

b) Propriété correspondante au Théorème de Fubini sur l'intégrale multiple des fonctions sommables au sens de Lebesgue, traduite pour les intégrales de notre sens.

c) Soit F(I) une fonction d'intervalle, fini-additive, définie dans un intervalle R contenu dans l'espace E_2 et telle que $F'_s(x, y)$[1] existe pour tout point (x, y) de R, alors la fonction de point $F'_s(x, y)$ (définie dans R) est intégrable à notre sens, et F(R) est l'intégrale de notre sens de la fonction $F'_s(x, y)$ sur l'intervalle R.

Parmi quelques propriétés de l'intégration qui est donnée dans cette Note, nous allons surtout étudier ici celle qui se rattache à *b*), puisque *a*), *c*)[2] avec d'autres propriétés fondamentales sont déjà montrées dans la Note I.

Pour cela, d'abord, nous allons montrer une propriété (Théorème 1) de l'intégrale au sens de Denjoy pour l'espace d'une dimension en examinant les relations avec l'intégrale au sens de Lebesgue. Cette propriété elle-même caractérise l'intégrale au sens de Denjoy dans l'espace E_1. En outre, elle nous fait connaître que les valeurs des fonctions d'intervalles, qui sont données comme l'intégrale au sens de Denjoy, peuvent être approchées aussi bien qu'on veut par celles des intégrales au sens de Lebesgue. L'intégrale qui est donnée dans cette Note pour l'espace E_2, est une extension de cette propriété.

1) Pour la définition, voir la Note I: Shizu Enomoto: Notes sur l'Intégration. I—Quelques Propriétés des Fonctions d'Intervalle, Proc. Japan Acad., **30**, 176 (1954).

2) Pour la fonction de point $F'_s(x, y)$ appartient à $\mathfrak{D}_R$. Or, en outre, nous voyons que pour la fonction $F'_s(x, y)$ on peut choisir une suite *monotone ascendante* des ensembles *fermés* comme une suite M_n $(n=1, 2, \dots)$ dans la Définition 1 de la Note I.