146. *Sur la Famille Monotone d'Ensembles Développables*

Par Tosiyuki TUGUÉ
Université Métropolitaine, Tokyo

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Oct. 12, 1954)

Dans la note[1] publiée récemment par M. Z. Okuyama et moi, nous avons donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille monotone[2] $\mathfrak{F}$ d'ensembles sommes de m ensembles F_ρ présente un type linéaire.[3] Le but de cette note est de donner celle-là pour le cas où $\mathfrak{F}$ est, plus généralement, une famille monotone d'ensembles développables.

1. Nous commençons par quelques définitions. Soit E un ensemble conténu dans l'espace euclidien U_r à r dimensions. Nous définissons les ensembles $R_\alpha(E)$ pour tout nombre ordinal α $(\alpha<\Omega)$ comme il suit:

$$R_0(E)=E, \tag{1.1}$$

$$R_\alpha(E)=\overline{R_{\alpha-1}(E)}-R_{\alpha-1}(E) \qquad \text{pour } \alpha \text{ isolé}, \tag{1.2}$$
$$=\bigcap_{\xi\in\Lambda(\alpha)} R_\xi(E) \qquad \text{pour } \alpha \text{ limite},$$

où $\Lambda(\alpha)$ est l'ensemble de tous nombres qui sont pairs et $<\alpha$.

Comme on sait bien, *si E est développable, il existe un nombre β tel qu'on ait $R_\beta(E)=0$ et $R_\alpha(E)\neq 0$ pour $\alpha<\beta$*, et alors, *E peut être développé univoquement en une série d'ensembles fermés décroissants:*

$$E=\overline{E}-\overline{\overline{E}-E}+\overline{\overline{\overline{E}-E}-(\overline{E}-E)}-\cdots+\overline{R_\alpha(E)}-\overline{R_{\alpha+1}(E)}+\cdots .^{4)}$$

Nous désignerons par $i(E)$ tel nombre β pour un ensemble E développable.

2. Soit $\mathfrak{F}$ une famille monotone d'ensembles développables. Maintenant, nous formons $[\mathfrak{F}]=\text{Ens.}\{\mathfrak{F}_E^{(\alpha)}\mid E\in\mathfrak{F},\ \alpha\leqq i(E)\}$ de sous-familles de $\mathfrak{F}$ de la façon suivante: quelque soit un ensemble E de $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{F}_E^{(1)}=\text{Ens.}\{X\mid X\in\mathfrak{F},\ \overline{X}=\overline{E}\}, \tag{2.1}$$

1) T. Tugué et Z. Okuyama: *Sur le type d'ordination de famille monotone d'ensembles*, Proc. Japan Acad., **30** (1954).

2) Nous disons que $\mathfrak{F}$ est *monotone* si $\mathfrak{F}$ est une famille d'ensembles tels que, de deux quelconques d'entre eux, l'un contient l'autre et est ordonnée de façon que l'ordination $E_1 \prec E_2$ soit simultanée à la relation d'inclusion $E_1\supset E_2$. Voir T. Tugué et Z. Okuyama, loc. cit.

3) Voir A. Denjoy: *L'énumération transfinie*, Livre I (1946); T. Tugué et Z. Okuyama, loc. cit.

4) Cf. C. Kuratowski: Topologie, **1**, 64.