178. *Sur Quelques Types des Théorèmes de Dualité dans les Groupes Topologiques*[1)]

Par Shin-ichi MATSUSHITA
Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1954)

1. Soient G un groupe topologique et $A(G)$ une algèbre de Banach commutative involutive des fonctions presque périodiques (*p. p.*) dans G, algèbre munie de la norme uniforme et de la multiplication habituelle, de plus $f^*=\bar{f}$ (valeur conjuguée). Rappelons que si $\Phi^0(\cdot)$ désigne l'ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires multiplicatives (non triviaux) φ définies sur une algèbre normée $(\cdot)$, en munissant $\Phi^0(A(G))$ de la topologie de convergence simple dans $A(G)$, il est compact séparé et

$$(1.1) \qquad A(G)\cong C(\Phi^0(A(G))),^{2)}$$

où $C(X)$ désigne l'algèbre de Banach des fonctions continues dans un compact X et le signe $\cong$ s'exprime une application isomorphe et isométrique entre deux espaces de Banach. On voit facilement que l'application ϕ, $x\longrightarrow\varphi_x$ de G dans $\Phi^0(A(G))$ est continue et si G est maximalement presque périodique (*max. p.p.*), G est considéré comme une partie dense de $\Phi^0(A(G))$. En outre, l'application $\mathring{\phi}$ de $A(G)$ sur $C(\Phi^0(A(G)))$ dans (1.1) se réalise en la forme suivante

$$(1.2) \qquad f(x)=\varphi_x(f)=\mathring{\phi}f(\phi(x)), \quad \mu(f)=\int_{\mathfrak{G}_0}\mathring{\phi}f(\varphi)\,d\nu(\varphi),$$

où μ est la valeur moyenne et ν une mesure de Radon >0 sur $\mathfrak{G}_0\equiv\Phi^0(A(G))$.

2. Nous considérons maintenant l'ensemble $\mathfrak{S}(G)$ de tous les opérateurs linéaire bornés et réguliers (reversibles) tels qu'on ait

$$(2.1) \qquad S_1)\ Sf^*=(Sf)^*, \qquad S_2)\ S(fg)=S(f)S(g), \qquad S_3)\ S(1)=1,$$

1 étant l'unité d'algèbre $A(G)$. $\mathfrak{S}(G)$ est alors non vide et forme un groupe algébrique; en effet, $ST^{-1}(f^*g)=ST^{-1}((TT^{-1}f)^*TT^{-1}g)=S((T^{-1}f)^*T^{-1}g)=(ST^{-1}f)^*ST^{-1}g$. D'ailleurs, en posant

$$\begin{array}{llll} {}_aS\,; & {}_aSf={}_af, & {}_af(x)=f(a^{-1}x), \\ S_a; & S_af=f_a, & f_a(x)=f(xa), \\ J\,; & Jf=f^{\sim}, & f^{\sim}(x)=f(x^{-1}), \end{array}$$

1) Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Mr. H. Freudenthal et à Mr. T. van Est pour les conseils très utiles et la critique précieuse.

2) D'après un théorème de représentation pour une B-algèbre commutative, qui a été établi par MM. I. Gelfand, R. V. Kadison, N. Fukamiya, et l'auteur même, e. g. R. V. Kadison: Mem. A. M. S., **7**, Thr. 6. 8 (1952).