192. *Sur les Espaces Complets et Rêgulièrement Complets. II*

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. Dec. 13, 1954)

1. Dans la Note "Sur les Espaces Complets et Régulièrement Complets. I",[1] nous avons introduit la notion des espaces rangés complets qui est une généralisation des espaces métriques complets. En effet, pour qu'un espace métrique soit complet il faut et il suffit qu'il le soit lorsqu'il est considéré comme un espace rangé. Mais, d'autre part, d'après un théorème de *A*. Tychonoff,[2] tout espace localement bicompact est homéomorphe à un ensemble de points d'un espace R_τ des fonctions $y=f(x)$ à valeurs contenues dans l'intervalle: $0\leq y\leq 1$, définie pour tous les éléments x d'un ensemble τ de la puissance assez élevée. De là, on peut voir facilement que tout espace localement bicompact peut être regardé comme un espace rangé complet. Donc, notre théorème I 3[3] englobe l'énoncé suivant: dans un espace localement bicompact, ou dans un espace métrique complet, tout ensemble ouvert non vide est de seconde catégorie.[4]

2. Considérons ensuite les axiomes de séparation pour les espaces rangés complets. Nous avons déjà donné deux exemples des espaces rangés complets qui sont non métrisables. Remarquons qu'il existe des espaces rangés complets qui sont partout irréguliers (donc des espaces non uniformisables).[5] En voici un exemple:

Exemple 3 (Urysohn).[6] Considérons le plan euclidien à deux dimensions, dont les points p peuvent être exprimés par leurs coordonnées $x, y: p=(x, y)$. Modifions la topologie habituelle à la manière suivante. Soit $p_0=(x_0, y_0)$ un point quelconque. Étant donné un entier non-négatif n $(n=0, 1, 2, \dots)$, désignons par $U_n(p)$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan dont deux coordonnées x, y satisfont à deux conditions suivantes:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<1/(n+1)^2,\quad y \neq y_0 \text{ sauf le cas où } x=x_0.$$

Pour le plan muni de cette topologie (qui est évidemment irrégulière partout), prenons comme $\mathfrak{V}_n$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ la famille de tous

1) Proc. Japan Acad., **30**, No. 7, 553–556 (1954).

2) Mathematische Annalen, **102**, 544–561 (1930).

3) Les chiffres désignent le numéro de la Note et celui du paragraphe où le théorème se trouve.

4) Voir p. ex. Bourbaki: Loc. cit., Topologie générale, Chap. IX, p. 76, Théorème 1 (Baire).

5) Bourbaki: Éléments de Mathématiques, III, Topologie générale, Chap. II.

6) M. Fréchet: Les Espaces Abstraits et Leur Théorie Considérée comme Introduction à l'Analyse Générale, 215 (1928) (Paris).