1. Sur l'Application Qui Fait Correspondre à une Courbe une Famille de Courbes

Par Tokui SATŌ

Institut de Mathématiques, Université de Kōbe

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1955)

1. Le but de cette présente note est à établir, en étendant l'idée de M. le prof. M. Hukuhara[1] à l'équation intégrale de Volterra, un théorème analogue à Kneser.

2. Désignons par $\vec{f}$ un système de n fonctions réelles $f_1(x),\dots, f_n(x)$ continues dans $[0,1]$. L'ensemble de tous les $\vec{f}$ forme un espace linéaire (C), si nous introduisons la distance $\rho(\vec{f},\vec{g})$ par $\max\limits_{0\leq x\leq 1}\{|f_1(x)-g_1(x)|,\dots,|f_n(x)-g_n(x)|\}$.

Nous considérons une application K qui fait correspondre à $\vec{f}\in(C)$ et à $\lambda\in[0,1]$ un ensemble contenu dans (C) : $(\vec{f},\lambda)\cdot K$ et qui satisfait aux conditions suivantes:

I. K est *compacte*, i.e. $\mathfrak{F}\cdot K=\bigcup\limits_{0\leq\lambda\leq 1}(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ est compacte si $\mathfrak{F}$ l'est, où $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ désigne la réunion $\bigcup\limits_{\vec{f}\in\mathfrak{F}}(\vec{f},\lambda)\cdot K$;

II. K est *semi-continue supérieurement*, i.e. si l'on a $\vec{u}_n\in(\vec{f}_n,\lambda_n)\cdot K$ et $\vec{f}_n\to\vec{f}$, $\lambda_n\to\lambda$, $\vec{u}_n\to\vec{u}$ pour $n\to\infty$, on a $\vec{u}\in(\vec{f},\lambda)\cdot K$;

III. K est knesérienne, i.e. $(\vec{f},\lambda)\cdot K$ est un continu dans (C) quels que soient $\vec{f}$ et λ.

On a alors le

Théorème 1. *Si $\mathfrak{F}$ est un continu dans (C), $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ est aussi un continu.*

On voit sans peine que $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K$ est fermé. S'il n'était pas un continu, il existerait deux ensembles fermés et disjoints $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$ tels que $(\mathfrak{F},\lambda)\cdot K=\mathfrak{B}^1\smile\mathfrak{B}^2$. Définissons $\mathfrak{F}^j\,(j=1,2)$ par $\mathfrak{F}^j=\{\vec{f}\in\mathfrak{F};\ \mathfrak{B}^j\frown(\vec{f},\lambda)\cdot K\neq 0\}$. On a évidemment $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^1\smile\mathfrak{F}^2$. Il est aisé de voir que $\mathfrak{F}^j\,(j=1,2)$ sont fermés. Donc $\mathfrak{F}^1\frown\mathfrak{F}^2\neq 0$. Soit $\vec{g}\in\mathfrak{F}^1\frown\mathfrak{F}^2$. $\mathfrak{B}^j(\vec{g},\lambda)=\mathfrak{B}^j\frown(\vec{g},\lambda)\cdot K\,(j=1,2)$ seraient fermés et disjoints. On aurait de plus $(\vec{g},\lambda)\cdot K=\mathfrak{B}^1(\vec{g},\lambda)\smile\mathfrak{B}^2(\vec{g},\lambda)$. Donc, $(\vec{g},\lambda)\cdot K$ ne serait pas un continu.

On a de même le

---

1) M. Hukuhara: Sur les familles de fonctions à une variable réelle, Journ. Fac. Sc. Hokkaidō Imp. Univ., I, **1**, 163–209 (1932).