12. *Sur les Espaces Complets et Régulièrement Complets. III*

Par Kinjirô KUNUGI, M.J.A.

(Comm. Feb. 18, 1955)

1. Revenons au problème de complétion. Nous sommes maintenant dans la position de plonger R dans l'espace S. Pour ce but, introduisons d'abord deux axiomes suivants.

Axiome T_1 de séparation: Pour toute paire de deux points distincts p et q, il existe un voisinage $V(p)$ de p qui ne contient pas l'autre point q.

Axiome (b): *Soient p, q deux points quelconques de R. Supposons que p n'appartienne pas à un voisinage $V(q)$ de q dont le rang est γ: $V(q) \in \mathfrak{B}_\gamma$. Si r est un point distinct de q et si deux voisinages $u_1(r)$, $u_2(r)$ de r satisfont à l'inclusion $V(q) \supseteq u_1(r) \supseteq u_2(r)$ et si l'on a $u_1(r) \in \mathfrak{B}_{\gamma_1}$, $u_2(r) \in \mathfrak{B}_{\gamma_2}$, $\gamma \leq \gamma_1 < \gamma_2$, alors il existe un voisinage $w(p)$ de p qui est disjoint de $u_2(r)$.*

Or, étant donné un point quelconque p de R, désignons par $\mathfrak{F}(p)$ la famille de toutes les suites fondamentales $v_0(p_0) \supseteq v_1(p_1) \supseteq \cdots \supseteq v_\alpha(p_\alpha) \supseteq \cdots$, $0 \leq \alpha < \omega_\mu$, dont tous les termes $v_\alpha(p_\alpha)$ contiennent le point p. Il faut remarquer d'abord que $\mathfrak{F}(p)$ *n'est pas vide*. En effet, choisissons un voisinage de rang quelconque $v(p)$ de p et posons $v_0(p) = v(p)$. Soit α un nombre ordinal tel que $0 < \alpha < \omega_\nu$ et supposons que nous ayons déjà une suite des voisinages $v_0(p) \supseteq v_1(p) \supseteq \cdots \supseteq v_\beta(p) \supseteq \cdots$, $0 \leq \beta < \alpha$ telle que $v_\beta(p) \in \mathfrak{B}_{\gamma_\beta}$, $\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_\beta < \cdots$. Alors, la partie commune $\bigcap_\beta v_\beta(p)$ contient un voisinage $u(p)$ de p, puisque α est inférieur à la profondeur $\omega(R)$. Posons $\gamma = \sup_\beta \gamma_\beta$ et appliquons la condition (a) à $u(p)$ et γ. Il existe alors un voisinage $v_\alpha(p)$ de p de rang γ_α supérieur à γ. Ainsi nous pouvons définir une suite fondamentale: $v_0(p) \supseteq v_1(p) \supseteq \cdots \supseteq v_\alpha(p) \supseteq \cdots$, $0 \leq \alpha < \omega_\nu$ qui appartient à $\mathfrak{F}(p)$.

Deuxièmement, *la famille $\mathfrak{F}(p)$ est filtrante*, c'est-à-dire pour deux suites fondamentales de $\mathfrak{F}(p)$, $u = \{u_\alpha(p_\alpha)\}, u_\alpha(p_\alpha) \in \mathfrak{B}_{\gamma'_\alpha}$, $0 \leq \alpha < \omega_{\mu_1}$, $v = \{v_\beta(q_\beta)\}$, $v_\beta(q_\beta) \in \mathfrak{B}_{\gamma''_\beta}$, $0 \leq \beta < \omega_{\mu_2}$, il existe une suite de $\mathfrak{F}(p)$, $w = \{w_\gamma(r_\gamma)\}$, $0 \leq \gamma < \omega_{\mu_3}$, $\omega_{\mu_3} \geq \max(\omega_{\mu_1}, \omega_{\mu_2})$ telle qu'on ait à la fois $w \leq u$, $w \leq v$. Pour le voir, il faut remarquer d'abord que, sans restreindre la généralité, deux nombres ordinaux inaccessibles ω_{μ_1} et ω_{μ_2} peuvent être supposés égaux à ω_ν. D'abord, puisque nous avons $p \in u_0(p_0) \cap v_0(q_0)$, il existe, vu l'axiome (B) de Hausdorff, un voisinage $w(p)$ de p tel qu'on ait $w(p) \subseteq u_0(p_0) \cap v_0(q_0)$. Posons d'autre part $\gamma = \max(\gamma'_0, \gamma''_0)$. Appliquons la condition (a) à $w(p)$ et γ. Il existe