10. *Sur les Points Singuliers d'une Équation Différentielle Ordinaire du Premier Ordre*

Par Yasutaka SIBUYA
Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 18, 1955)

1. L'équation différentielle

$$xy'=y(\lambda+yf(x,y)), \tag{1.1}$$

où $f(x,y)$ est une fonction holomorphe pour $x=y=0$, admet si λ est un nombre irrationnel, une solution formelle

$$y=z\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}b_{mn}x^m z^n\}, \tag{1.2}$$

z désignant la fonction Cx^{λ}. M. C. L. Siegel a démontré la convergence de la série (1.2) sous la condition,

$$|(n-1)\lambda+m|>K(m+n)^{-\nu},$$

K et ν étant des nombres positifs, indépendants de m et de n. D'autre part, M. H. Dulac a donné un exemple tel que la série (1.2) diverge. Mais son exemple est artificiel et il y aurait lieu de se demander: *la série (1.2) converge-t-elle si $f(x,y)$ est une fonction rationnelle? La réponse est négative*; c'est ce que nous allons montrer.

2. Considérons l'équation différentielle

$$xy'=\lambda y+y^2+p(x)y^3, \tag{2.1}$$

où

$$p(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m+\cdots\ . \tag{2.2}$$

En portant l'expression (1.2) dans (2.1), nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m+n\lambda)b_{mn}x^mz^n \tag{2.3}$$
$$=z\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}b_{mn}x^mz^n\}^2+p(x)z^2\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}b_{mn}x^mz^n\}^3.$$

On voit immédiatement

$$b_{0k}=\lambda^{-k} \qquad (k\geqq 0), \tag{2.4}$$

$$b_{m1}=0 \qquad (m\geqq 1), \tag{2.5}$$

et

$$(m+2\lambda)b_{m2}=a_m+\cdots,$$

les termes non écrits ne dépendant que de $a_1,\ldots,a_{m-1}$. Si donc on pose

$$b_{mn}=F_{mn}(\lambda,a_1,\ldots,a_m)/(m+n\lambda), \tag{2.6}$$

$$F_{mn}=B_{mn}(\lambda)a_m+R_{mn}(\lambda,a_1,\ldots,a_{m-1}), \tag{2.7}$$

on a

$$B_{m2}(\lambda)=1 \qquad (m\geqq 1). \tag{2.8}$$

En portant les expressions (2.6) dans (2.3), nous obtenons

$$B_{mn}(\lambda)=2\sum_{\mu+\nu=n-1}b_{0\mu}B_{m\nu}(\lambda)/(m+\nu\lambda)+\sum_{\mu+\nu+\rho=n-2}b_{0\mu}b_{0\nu}b_{0\rho} \tag{2.9}$$