37. *Fonctions Presque Périodiques du Type Spécial. II*

Par Shin-ichi MATSUSHITA
Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1955)

§4. *Valeur moyenne.* Pour montrer l'existence des valeurs moyennes dans $\mathfrak{A}(G)$, on peut opérer sans revenir aux définitions primitives; de plus le procédé dû à MM. S. Bochner et J. von Neumann est ici inapplicable, une partie totalement bornée de $\mathfrak{A}(G)$ n'étant nécessairement séparable: *Cf.* Remarque dans [I].[1] Toutefois, en tenant compte du Théorème 1 ci-devant, on peut conduire aisément de l'existence de valeurs moyennes des fonctions *p.p.* numériques à celle des fonctions de $\mathfrak{A}(G)$.

Théorème 4. *Pour toute* $\alpha(x)\in\mathfrak{A}(G)$ *est associée une et une seule mesure* $m[\alpha]=m_x[\alpha(x)]$ *(dite valeur moyenne) telle qu'il existe, pour tout voisinage* $\omega=\omega(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_l;\varepsilon)$ *dans* $\mathfrak{M}$, $\hat{f}_j\in L^0(V_0)\,(1\leqq j\leqq l)$, *n éléments* $a_1,\dots,a_n$ *de G et n nombres* $\xi_1,\dots,\xi_n\geqq 0$ *avec* $\xi_1+\cdots+\xi_n=1$ *tels qu'on ait*

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha(xa_iy)-m[\alpha]\subset\omega,\ \textit{pour tous}\ x,\ y\in G. \tag{4.1}$$

Théorème 5. *La valeur moyenne possède les propriétés suivantes; i) l'application* $\alpha\to m[\alpha]$ *est linéaire continue, ii)* $m[\alpha]=m[\check{\alpha}]=m[\tau_a\alpha]$ $(a\in G)$, *où* $\check{\alpha}(x)=\alpha(x^{-1})$ *et* $\tau_a\alpha(x)=\alpha(a^{-1}x)$, *iii) si* $\alpha(x)=\mu\in\mathfrak{M}$*(constante), on a* $m[\alpha]=\mu$.

Théorème 5$^{\text{bis}}$**.** *Pour la valeur moyenne* $m[\alpha]$ *et pour toute* $\hat{f}\in L^0(V_0)$,

$$m_x[\langle\hat{f},\ \alpha\rangle(x)]=\langle\hat{f},\ m_x[\alpha(x)]\rangle. \tag{4.2}$$

Démonstrations des Théorèmes 4, 5, et 5$^{\text{bis}}$. Étant donné un voisinage $\omega=\omega(\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_l;\varepsilon)$ dans $\mathfrak{M}$, nous désignerons par $m^{\alpha}(\hat{f}_j)$ les valeurs moyennes numériques des fonctions *p.p.* continues $\langle\hat{f}_j,\alpha\rangle(x)$ pour $1\leqq j\leqq l$ (Théorème 1), alors il existe n éléments $a_1,\dots,a_n\in G$ et n nombres $\xi_1,\dots,\xi_n\geqq 0$ tels que $\xi_1+\cdots+\xi_n=1$ qui vérfient simultanément

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\langle\hat{f}_j,\ \alpha\rangle(xa_iy)-m^{\alpha}(\hat{f}_j)\Big|<\varepsilon,\quad(1\leqq j\leqq l) \tag{4.3}$$

pour tous $x,\ y\in G$.[2] D'autre part, soit H l'ensembre des translatées

1) S. Matsushita: *Fonctions presque périodiques du type spécial. I*, Proc. Japan Acad., **31**, No. 2; cité [I] dans cette Note. Théorèmes 8, 12 de S. Bochner et J. von Neumann, loc. cit., et Théorème 16 de J. von Neumann, loc. cit., sont inapplicable à présent.

2) Cf. J. von Neumann: *Loc. cit.*, Corollaire du Théorème 14. W. Maak: *Fastperiodische Funktionen*, Chap. II (1951).