

29. Sur les Valeurs Propres des Endomorphismes de l'Espace Vectoriel

Par MASUO HUKUHARA

Institut de Mathématiques, Université de Tokyo
(Comm. by Z. SUTUNA, M.J.A., March 12, 1955)

Soient \mathfrak{R} un espace vectoriel sur un corps de nombres complexes, K un endomorphisme de \mathfrak{R} et $f(\lambda)$ un polynome. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines distinctes de multiplicités μ_1, \dots, μ_n de l'équation $f(\lambda) = \rho_0$. Etant donné un endomorphisme quelconque L , nous désignerons par $N^m[L; \lambda]$ le sous-espace défini par

$$N^m[L; \lambda] = \{x; (L - \lambda I)^m x = 0\}.$$

Si $H = f(K)$, le sous-espace $N^m[H; \rho_0]$ est la somme directe des sous-espaces $N^{m\mu_k}[K; \lambda_k]$:

$$(1) \quad N^m[H; \rho_0] = \sum_{k=1}^n N^{m\mu_k}[K; \lambda_k].$$

Cette relation, que nous allons démontrer dans la suite, généralise et précise les résultats de MM. Vivanti-Schwank¹⁾ et de M. T. Sato.²⁾

Démontrons d'abord que le premier membre de (1) contient le second. Pour cela, prenons un vecteur quelconque x de $N^{m\mu_k}[K; \lambda_k]$. On a alors

$$(K - \lambda_k I)^{m\mu_k} x = 0.$$

λ_k étant une racine de multiplicité μ_k de $f(\lambda) = \rho_0$, on peut écrire

$$f(\lambda) - \rho_0 = (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k} f_1(\lambda),$$

où $f_1(\lambda)$ est un polynome ne s'annulant pas en λ_k . On a alors

$$(f(K) - \rho_0 I)^m x = f_1(K)^m (K - \lambda_k I)^{m\mu_k} x = 0,$$

ce qui démontre $x \in N^m[H; \rho_0]$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous remarquons que K satisfait à l'équation algébrique

$$(f(K) - \rho_0 I)^m = 0$$

dans le sous-espace $\mathfrak{R}' = N^m[H; \rho_0]$. On peut donc appliquer le théorème 23.2 de mon article antérieur.³⁾ Par conséquent, on a

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & O & \cdots & O \\ O & K_2 & \cdots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \cdots & K_n \end{pmatrix},$$

1) Vivanti-Schwank: Lineare Integralgleichungen, 1929.

2) Tanezo Sato: On eigenvalues of iterated kernels, Proc. Phys.-Math. Soc., Japan, **23**, 4-7 (1941).

3) Masuo Hukuhara: Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, Journ. Fac. Sci., Univ. Tokyo, **7**, 129-192 (1954).