50. *Fonctions Presque Pèriodiques du Type Spécial. III*[1)]

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 12, 1955)

§ 6. *Théorie de représentation composée.* Jusqu'à présent, nous avons eu, dans la théorie de représentation des groupes topologiques, les deux apparemment divers aspects, l'un sur la représentation de dimension finie et l'autre, dans le cas où un groupe est *l. c.*, sur celle de dimension infinie. L'étude des fonctions *p. p.* au sens de MM. H. Bohr et von Neumann se appartient tout à fait à la théorie de représentation de la première espèce; c'est le résultat célèbre de M. J. von Neumann lui-même.[2)]

D'ailleurs, la dernière théorie de représentation, se basant sur l'analyse des fonctions de type positif, a été établie par MM. I. Gelfand et D. Raïkov, et développée successivement et assez indépendamment par MM. H. Cartan-R. Godement (*loc. cit.*), R. Godement lui-même, I. E. Segal, F. I. Mautner, etc.[3)] Toutefois il me semble que la *liaison organisée* de ces deux théories n'ait guère pu être menée à bien jusqu'ici que dans le cas où un groupe est compact (par contre, la théórie de MM. F. Peter et H. Weyl pour les groupes compacts ne laisse rien à désirer à ce point de vue).[4)]

Sous cette intention, nous décomposerons tout d'abord toute fonction $a(x)$ de $\mathfrak{A}(G)$ en la somme direct (continue) de ses sections $a_{\mathfrak{D}}(x)$, et ensuite approcherons chaque $a_{\mathfrak{D}}(x)$, dans l'espace $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}(G)$ (défine ci-dessous) par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $D_\nu\varepsilon_\varphi$, ε_φ étant une mesure ponctuelle $+1$ en un point $\varphi \in V_0$; à la fin, nous verrons que ces procédures entraînent bien les deux représentation-théories prémentionées comme les deux extrêmes.

6.1. Soit $\{\mathfrak{D}^\nu(\cdot)\}_{\nu\in\Lambda}$ une famille complète des représentation unitaires irréductibles *de dimension finie*, mutuellement inéquivalentes, de G; pour chaque $\mathfrak{D}^\nu(\cdot)=(D^\nu_{pq}(\cdot))_{p,q}$ (de degré n_ν), nous désignons par $\mathfrak{A}_\nu(G)$ (en abrégé $\mathfrak{A}_\nu$) le sous-espace vectoriel fermé

1) Nous faisons usage continûment et systématiquement des notations de mes Notes précédentes: *Fonctions presque périodiques du type spécial.* I et II, ici citées [I] et [II] respectivement.

2) J. von Neumann: *Almost periodic functions in a group*, Trans. Amer. Math. Soc., **36**, 445–492 (1934).

3) R. Godement: *Sur la théorie des représentation unitaires*, Ann. Math., (2) **53**, 68–124 (1951). I. E. Segal: *The group algebra of a locally compact group*, Trans. Amer. Math. Soc., **61**, 69–105 (1947). F. I. Mautner: *Unitary representations of locally compact groups*, I et II, Ann. Math., **51** et **52** (1950).

4) F. Peter et H. Weyl: *Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossen kontinuierlichen Gruppen*, Math. Ann., **97** (1927).