65. *Fonctions Presque Pêriodiques du Type Spêcial.* IV

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1955)

Nous avons déjà montré aux §§ 7–8 dans ma Note précédante [III],[1] qu'à toute variété linéaire invariante minimale $\Delta_{\varphi_0}^{\nu}$ de $\mathfrak{A}(G)$, on peut faire correspondre une fonction $\tau_{\varphi_0}^{\nu}(x)\in\Delta_{\varphi_0}^{\nu}$, l'espace hilbertien $H_{\varphi_0}^{\nu}$ et la représentation unitaire composée U_a dans celui-ci. Dans ce qui suit, nous allons décomposer cette représentation U_a et déterminer la forme exacte de décomposition pour plusieurs cas.

§ 8. Pour toute $f\in L^1(G)$, en posant $f_{ij}^{\nu}(x)=\overline{D_{ij}^{\nu}(x)}f(x)$ et $[f_i^{\nu}, g_j^{\nu}]_{\varphi_0}=\sum_{k=1}^{n_\nu}(\dot{f}_{ik}^{\nu}, \dot{g}_{jk}^{\nu})_{\varphi_0}^1$, on a évidemment

$$(\dot{f}, \dot{g})_{\varphi_0}^{\nu}=\frac{1}{n_\nu}\ \mathit{Trace}\ [\boldsymbol{D}^{\nu}(f, g)_{\varphi_0}], \tag{8.1}$$

où $\boldsymbol{D}^{\nu}(f, g)_{\varphi_0}=\int_G\overline{\varphi_0(x)}\mathfrak{D}^{\nu}(x^{-1})g^*f(x)dx$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}[f_1^{\nu}, & g_1^{\nu}]_{\varphi_0} & \cdots & [f_1^{\nu}, & g_{n_\nu}^{\nu}]_{\varphi_0}\\ \vdots & & \cdots\cdots & & \vdots\\ [f_{n_\nu}^{\nu}, & g_1^{\nu}]_{\varphi_0} & \cdots & [f_{n_\nu}^{\nu}, & g_{n_\nu}^{\nu}]_{\varphi_0}\end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

$\dot{U}_a$ désignera maintenant la représentation unitaire de G *dans l'espace hilbertien* $H_{\varphi_0}^1$; on posera encore $[f_i^{\nu}, \dot{U}_a g_j^{\nu}]_{\varphi_0}=\sum_{k=1}^{n_\nu}(\dot{f}_{ik}^{\nu}, \dot{U}_a\dot{g}_{jk}^{\nu})_{\varphi_0}^1$ et $\boldsymbol{D}^{\nu}(f, \dot{U}_a g)_{\varphi_0}=([f_i^{\nu}, \dot{U}_a g_j^{\nu}]_{\varphi_0})_{i,j}$.

Par définition, on a aussitôt que

$$\begin{aligned} n_\nu(\dot{f}, U_a\dot{g})_{\varphi_0}^{\nu}&=\sum_{i,j}\iint_G \varphi_0(x^{-1}y)f_{ij}^{\nu}(x)D_{ij}^{\nu}(y)\overline{g_a(y)}dxdy\\ &=\sum_{i,j}(\sum_k D_{ik}(a)\iint_G \varphi_0(x^{-1}y)f_{ij}^{\nu}(x)\overline{g_{kj}^{\nu}(a^{-1}y)}dxdy\\ &=\sum_{i,k}D_{ik}(a)\sum_j(\dot{f}_{ij}^{\nu}, \dot{U}_a\dot{g}_{kj}^{\nu})_{\varphi_0}=\sum_k(\sum_i D_{ik}(a)[f_i^{\nu}, \dot{U}_a g_k^{\nu}]_{\varphi_0}), \end{aligned}$$

ce qui montre le

Théorème 15. *La représentation composée U_a dans $H_{\varphi_0}^{\nu}$ se décompose;*

$$(\dot{f}, U_a\dot{g})_{\varphi_0}^{\nu}=\frac{1}{n_\nu}\ \mathit{Trace}\ [\mathfrak{D}^{\nu}(a)\boldsymbol{D}^{\nu}(f, \dot{U}_a g)_{\varphi_0}^{+}], \tag{8.3}$$

où $\boldsymbol{D}^{\nu}(\cdot)^{+}$ désigne la transposée de $\boldsymbol{D}^{\nu}(\cdot)$.

Étudions les cas particuliers; $(\dot{f}, U_a\dot{g})_{\varphi_0}^1=(\dot{f}, \dot{U}_a\dot{g})_{\varphi_0}^1$ et $(\dot{f}, U_a\dot{g})_1^{\nu}=(1/n_\nu)\ \mathit{Trace}\ [\mathfrak{D}^{\nu}(a)\boldsymbol{D}^{\nu}(f, g)_{\varphi_0}^{+}]$. De plus, dans le *Cas d'un groupe abélien,* pour $\mathfrak{D}^{\nu}=\chi_\nu$ et $\varphi_0=\chi_\lambda$, on a

1) S. Matsushita: *Fonctions presque périodiques du type spécial, I, II, III* dans les tomes précédents de Proc. Japan Acad., citées resp. [I], [II], [III].