78. *Fonctions Presque Pêriodiques du Type Spêcial.* V

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., June 13, 1955)

§ 11. *Rapport entre les trois espaces* $\mathfrak{A}^s$, $\mathfrak{A}^0$, *et* $\mathfrak{A}$. Étant donné un espace vectoriel uniforme $\mathfrak{L}$, on notera $C(G, \mathfrak{L})$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{L}_b^G$ formé des applications continues de G dans $\mathfrak{L}$. On a alors le

Théorème 21. *$\mathfrak{A}(G)(\mathfrak{A}^1(G))$ est fermé dans $C(G, \mathfrak{M})$ (resp. $C(G, \mathfrak{M}^1)$) muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Remarque — Nous signalons ici expressément que, ce qui n'y aurait pas à revenir comme nous ne nous intéressons qu'un groupe topologique (*l. c.*), $\mathfrak{A}(G)$ (ou $\mathfrak{A}^1(G)$) se forme des fonctions continues dans $\mathfrak{M}_b^G$ (resp. $\mathfrak{M}_b^{1G}$); lorsqu'on parlait de ces espaces (dans Notes précédantes [I]$\sim$[IV]),[1] il était toujours sous-etendu ce fait.

La démonstration du Théorème sera facile, donc dispensée.

En munissant $C(G, \mathfrak{M})$ de la *topologie de la convergence simple* (ou *compacte*), on le note par $C^s(G, \mathfrak{M})$ (resp. $C^0(G, \mathfrak{M})$) et définit l'espaces des fonctions presque périodiques à gauche, noté $\mathfrak{A}^s(G)$ (resp. $\mathfrak{A}^0(G)$), dans $C^s(G, \mathfrak{M})$ (resp. $C^0(G, \mathfrak{M})$). En général, $\mathfrak{A}^s(G)$ et $\mathfrak{A}^0(G)$ ne sont plus fermés. Le Lemme suivant découle aussitôt de la définition elle-même:

Lemme 4. *Pour que $\alpha \in C(G, \mathfrak{M})$ soit p. p. dans $C^s(G, \mathfrak{M})$ (c'est-à-dire, $\in \mathfrak{A}^s(G)$), il faut et il suffit que l'ensemble* $\mathrm{H} \equiv \{\alpha(x)\}_{x \in G}$ *soit relativement compact (r. c.) dans $\mathfrak{M}$ muni de la topologie vague. Comme $L^0(V_0)$ est un espace "tonnelé",[2] cette dernière condition est équivalente à chacune des propriétés mutuellemment équivalentes qui vont suivre;*[3]

i) H *est faiblement borné,*

ii) H *est fortement borné (relativement à chaque partie bornée dans l'espace $L^0(V_0)$),*

iii) H *est un ensemble équicontinu.*

Ainsi, on voit que la presque-périodicité à gauche dans $\mathfrak{A}^s(G)$, de même que dans $\mathfrak{A}(G)$ et $\mathfrak{A}^1(G)$, entraîne celle à droite.

Lemme 5. *Toute fonction de $\mathfrak{A}^0(G)$, $\mathfrak{A}(G)$, ou $\mathfrak{A}^1(G)$ est unifor-*

1) S. Matsushita: *Fonctions presque périodiques du type spécial. I, II, III, IV,* Proc. Japan Acad., **31** (1955).

2) N. Bourbaki [3]: *Sur certains espaces vectoriels topologiques,* Ann. de l'Inst. Fourier, **2**, 5–16 (1950).

3) En ce qui concerne l'équivalence entre ceux-ci, N. Bourbaki [1]: *Intégration,* Act. Sci. et Ind., Paris, 62 (1952). R. E. Edwards: *A theory of Radon mesure on locally compact spaces,* Acta Math., **88**, 133–164 (1952).