

## 76. Über die Frattini-Gruppe einer endlichen Gruppe

Von Noboru ITÔ

Mathematisches Institut der Nagoya Universität

(Comm. by K. SHODA, M.J.A., June 13, 1955)

Das Ziel der vorliegenden Note ist der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $H$  eine nachinvariante Untergruppe von  $G$ .<sup>1)</sup> Genau dann ist  $H$  nilpotent, wenn die Frattini-Gruppe  $F(G)$  von  $G$  die Kommutatorgruppe  $H'$  von  $H$  umfasst.

Den wohlbekannten Fall  $H=G$  verdankt man Herrn Wielandt [2].<sup>2)</sup> Kürzlich bewies Herr Huppert den Satz für  $H=G'$  [1].

Wir schicken voraus:

**Hilfssatz.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $H$  eine nachinvariante nilpotente Untergruppe von  $G$ . Dann gibt es einen nilpotenten Normalteiler  $K$  von  $G$ , der  $H$  umfasst.

**Beweis.** Sei  $K^*$  eine maximale nilpotente nachinvariante Untergruppe von  $G$ , welche  $H$  umfasst. Ist  $K^*$  in  $G$  normal, so sind wir fertig. Ist  $K^*$  nicht normal in  $G$ , so gibt es zwei nachinvariante Untergruppen  $N_1$  und  $N_2$  von  $G$  mit  $K^* \subseteq N_2 \subseteq N_1$ , derart, dass  $K^*$  in  $N_2$  invariant ist, in  $N_1$  aber nicht. Dann gibt es eine in  $N_1$  zu  $K^*$  konjugierte Untergruppe  $K^{**}$ , welche von  $K^*$  verschieden ist. Offenbar  $K^*K^{**}$  ein nilpotenter Normalteiler von  $N_2$ , welcher  $K^*$  eigentlich umfasst. Da  $K^*K^{**}$  in  $G$  nachinvariant ist, widerspricht dies der Maximaleigenschaft von  $K^*$ . Also ist  $K^*$  invariant in  $G$ .

**Beweis des Satzes.** (1) Zunächst nehmen wir an, dass  $H$  nilpotent ist, aber  $H'$  nicht in  $F(G)$  liegt. Nach dem Hilfssatz dürfen wir annehmen, dass  $H$  ein Normalteiler von  $G$  ist. Ferner gibt es nach unserer Annahme eine maximale Untergruppe  $M$  von  $G$ , so dass  $G=MH'$ , woraus  $H=M \cap H \cdot H'$  folgt. Sei  $p$  ein beliebiger Primteiler der Ordnung von  $H$  und seien  $H_p$ ,  $(M \cap H)_p$  und  $(H')_p$  bzw.  $p$ -Sylowgruppen von  $H$ ,  $M \cap H$ , und  $H'$ . Da  $H$  nilpotent ist, haben wir  $H_p=(M \cap H)_p \cdot (H')_p$  und  $(H_p)'=(H')_p$ . Daher ist  $H_p=(M \cap H)_p \cdot (H_p)'$ , woraus  $H_p=(M \cap H)_p$  folgt, da  $F(H_p)$  ja  $(H_p)'$  umfasst. Dann muss  $M$  die Gruppe  $H$ , also auch  $H'$  umfassen, was ein Widerspruch gegen unsere Annahme ist.

1) Die Untergruppe  $H$  der Gruppe  $G$  wollen wir nachinvariant nennen, wenn sie in irgendeiner Normalreihe von  $G$  liegt. (Wielandt: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z., **45**, 209-244 (1939)).

2) Vgl. auch Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie, Bd. I, Leipzig-Berlin (1937).