104. *Fonctions Presque Périodiques du Type Spécial.* VI

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1955)

§15. *Fonctionnelles élémentaires sur* $\mathfrak{A}^0$ *et* $\mathfrak{A}$. Ce paragraphe contient l'étude des fonctionnelles de certaines propriétés définies sur les espaces $\mathfrak{A}^0$ et $\mathfrak{A}$ et du rapport entre les espaces de ces fonctionnelles; on y introduit ensuite quelques topologies qui sont commodes pour ce qui vont suivre.

$C^\infty(G)$ désignera l'espace de Banach (simultanément, l'algèbre de Banach par rapport au produit ponctuel), normé par la norme uniforme, des fonctions bornées uniformément continues *à gauche* sur G: lorsque G est abélien ou bien compact, les deux structures uniformes à gauche et à droite sont évidemment confondues.

Une *fonctionnelle élémentaire* ϕ sur $\mathfrak{A}^0$ (ou $\mathfrak{A}$) est une application linéaire continue de l'espace topologiques $\mathfrak{A}^0$ (resp. $\mathfrak{A}$)[1] dans $\mathfrak{M}$, espace muni de sa structure uniforme vague, qui satisfait aux conditions suivantes:

1°) si $\alpha(x)=f(x)\alpha_0(x)$ pour une $f\in C^\infty(G)$ (resp. $\in A(G)$) et une $\alpha_0\in\mathfrak{A}^0$ (resp. $\mathfrak{A}$), on a

$$\phi(\alpha)=\mathring{\phi}(f)\phi(\alpha_0), \tag{15.1}$$

où $\mathring{\phi}(f)$ est une constante qui dépend seulement de f et ϕ, mais ne de α_0 à rien,

2°) pour toute $\mu\in\mathfrak{M}$, $\phi(\mu)=\mu$.

L'ensemble de telles fonctionnelles élémentaires définies sur $\mathfrak{A}^0$ (ou $\mathfrak{A}$) se note $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ (resp. $\Phi^0(\mathfrak{A})$). Ce sont évidemment non-vides; en effet, les ϕ_x définies par $\phi_x(\alpha)=\alpha(x)$, $x\in G$, forment une partie non-vide Φ^0_G de $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ ou de $\Phi^0(\mathfrak{A})$ suivant que $\alpha\in\mathfrak{A}^0(G)$ ou $\in\mathfrak{A}(G)$. Dans la suite nous considérons toujours $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ (resp. $\Phi^0(\mathfrak{A})$) comme muni de la topologie compatible d'espace topologique des applications continues $C(\mathfrak{A}^0,\mathfrak{M})$ (resp. $C(\mathfrak{A},\mathfrak{M})$) déterminée par la convergence simple dans celui-ci, sauf indication contraire.

Lemme 6. *i) La valeur* $\mathring{\phi}(f)$ *qui correspond à chaque* $f\in C^\infty(G)$ *resp.* $A(G)$ *définit une fonctionnelle linéaire multiplicative continue, de la norme* 1, *sur l'algèbre de Banach* $C^\infty(G)$ *resp.* $A(G)$, *vérifiant* $\mathring{\phi}(1)=1$. *ii) L'application* $\phi\to\mathring{\phi}$ *est une application continue de* $\Phi^0(\mathfrak{A}^0)$ *resp.* $\Phi^0(\mathfrak{A})$ *sur l'espace des fonctionnelles linéaires multiplica-*

1) On munit toujours $\mathfrak{A}^0$ de la topologie de la *convergence uniforme* comme dans $\mathfrak{A}$; sous cette topologie $\mathfrak{A}^0$ est fermé dans $C(G,\mathfrak{M})$ et $\mathfrak{A}$ est un sous-espace fermé de celui-là, Théorème 23 de la Note précédente; citée [V].